

Corso di Progettazione, Costruzioni e Impianti

Dispensa di costruzioni

per la classe terza e quarta

Indice

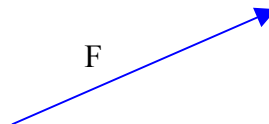
1. FORZE E VETTORI
2. GEOMETRIA DELLE MASSE
3. STATICA CORPI RIGIDI
4. TRAVI RETICOLARI
5. DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI
6. SOLLECITAZIONI SEMPLICI
7. MURATURE
8. IL CEMENTO ARMATO

CONCETTO DI VETTORE E DI FORZA

Si definisce vettore una entità geometrica caratterizzata da:

- ↘ Intensità
- ↘ Direzione
- ↘ Verso
- ↘ Punto di applicazione

La forza è un particolare vettore che interessa nelle costruzioni e viene indicata graficamente con una freccia



L'intensità è rappresentata dalla lunghezza della freccia in opportuna scala. Per esempio adottando una scala $1\text{cm} = 10\text{ Kg}$; una freccia lunga 3 cm rappresenta una forza avente intensità di 30 Kg.

La direzione è rappresentata dalla direzione della retta r che contiene la freccia (orizzontale, verticale, inclinata).

Il verso è rappresentato dalla punta della freccia e può essere positivo o negativo se : a destra o a sinistra; in alto o in basso; secondo la convenzione che si sceglie.

Il punto di applicazione è il punto da cui inizia la freccia.

La freccia (forza) può scorrere a piacimento lungo la sua retta di direzione in un verso o nell'altro, pur mantenendo sempre la stessa intensità, direzione e verso. Pertanto il punto di applicazione potrà cambiare ogni volta che la freccia si sposta. Quando si sposta la forza lungo la sua retta d'azione, le sue caratteristiche non cambiano, quindi non cambia nemmeno l'effetto che la forza produce al corpo su cui è applicata.

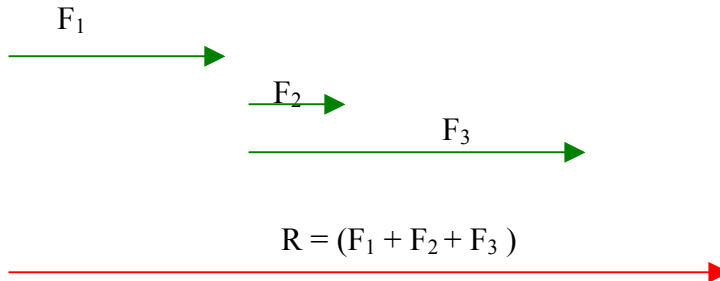
CONCETTO DI FORZA

La forza è indefinibile.

Il concetto di forza può essere percepito solo per intuizione cioè riferendosi direttamente alla sensazione. Cioè possiamo immaginare che la forza sia quell'ente fisico capace di produrre uno spostamento o la deformazione di un corpo.

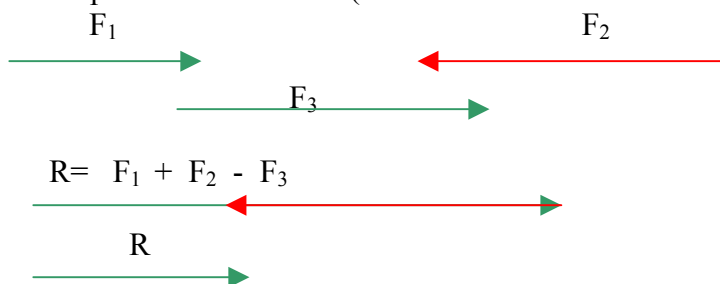
RISULTANTE DI DUE O PIU' FORZE

1. Forze parallele ed **equiverse** (che hanno lo stesso verso)



La risultante di due o più forze parallele ed equiverse è la forza che si ottiene disponendo in fila indiana le n forze sulla stessa retta d'azione. Cioè sarà una forza che avrà la stessa direzione; lo stesso verso ed intensità pari alla somma delle intensità delle n forze. La risultante si troverà sempre all'interno delle due forze estreme, per conoscere esattamente la posizione occorre eseguire il poligono funicolare o applicare il teorema di Varignon. Nel caso particolare di due sole forze parallele e concordi la risultante si troverà nel mezzo delle due a pari distanza.

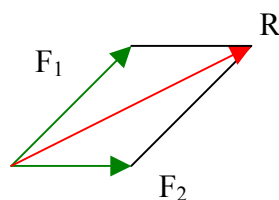
2. Forze parallele e **discordi** (che non hanno lo stesso verso)



Analogamente in questo caso la risultante sarà una forza che avrà la stessa direzione, intensità pari alla **somma algebrica** delle n intensità e verso positivo o negativo secondo il valore dell'intensità.

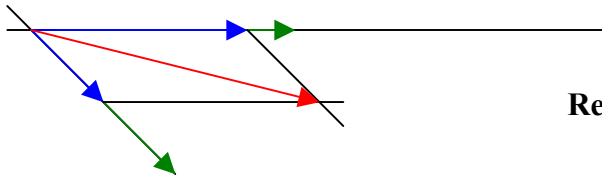
Occorre tenere conto che per sommare una forza di segno positivo con una di segno negativo occorre unire la punta della freccia della forza positiva con l'inizio della freccia che rappresenta la forza negativa (come se tornasse indietro). La risultante in questo caso potrà essere esterna alle forze.

3. N° 2 Forze incidenti (non parallele)



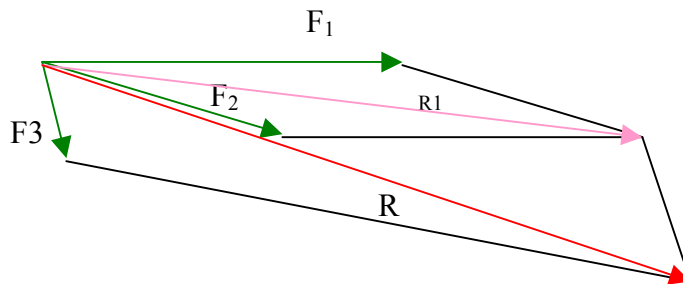
Regola del parallelogramma

Se le forze non concorrono nello stesso punto, cioè se sono distanti si possono far scorrere avanti o indietro lungo la loro retta d'azione fino ad incontrarsi nello stesso punto:



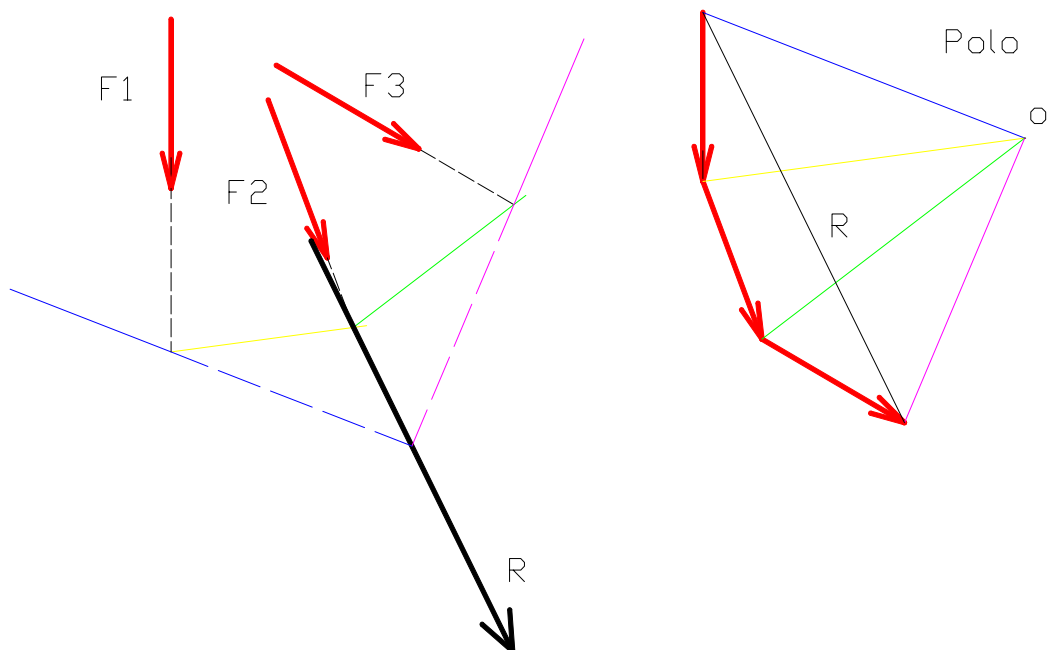
Regola del parallelogramma

4. N° 3 o più forze incidenti



Regola del parallelogramma
(successive risultanti)

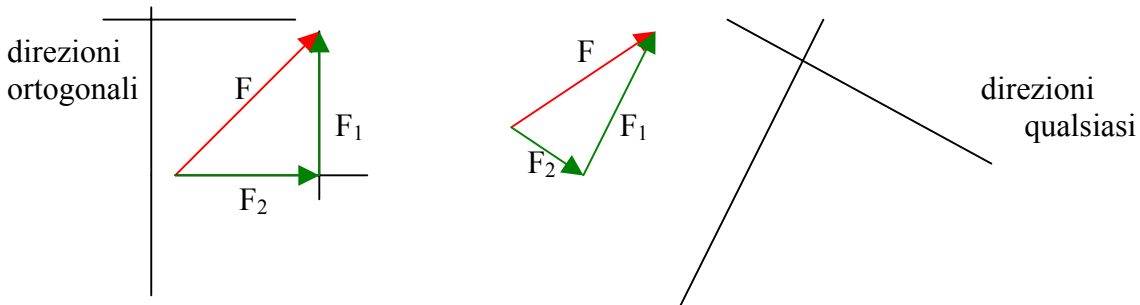
Quando due o più forze sono parallele (o quasi) come in questo caso la costruzione del parallelogramma è impossibile (o molto difficoltosa), infatti se sono parallele non hanno punto d'incontro al finito, mentre se sono incidenti in un punto molto lontano occorrerebbe un enorme disegno. In questi casi si impiega allora il metodo del **poligono funicolare**.



Poligono funicolare

SCOMPOSIZIONE DI UNA FORZA IN DUE DIREZIONI

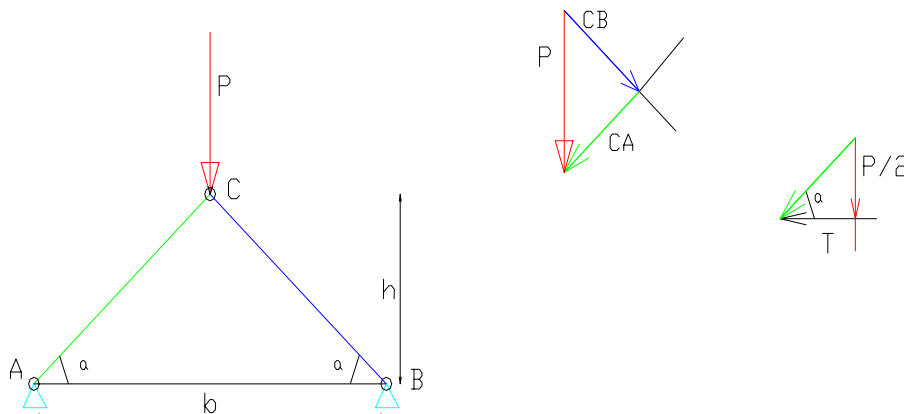
Una forza può sempre essere scomposta in due direzioni che possono anche essere ortogonali fra di loro:



Basta mandare dalle estremità della forza due rette parallele alle direzioni assegnate e staccare le forze **componenti** in modo tale che i loro versi si rincorrono e si incontrano con quello della forza F infatti la F non è altro che la risultante delle due componenti.

- **APPLICAZIONE:**

Si vuole determinare lo sforzo nelle aste AC – BC – AB per effetto della forza verticale P. Basta decomporre la forza P nelle due direzioni AC e BC ; dopo lo sforzo nell'asta AC oppure quello nell'asta BC si decompone nella direzione verticale e orizzontale ottenendo lo sforzo AB



- Si può risolvere anche analiticamente:

$$P_{CB} = P_{CA} = P / 2 * \cos \alpha$$

$$T = P / 2 * \operatorname{ctg} \alpha$$

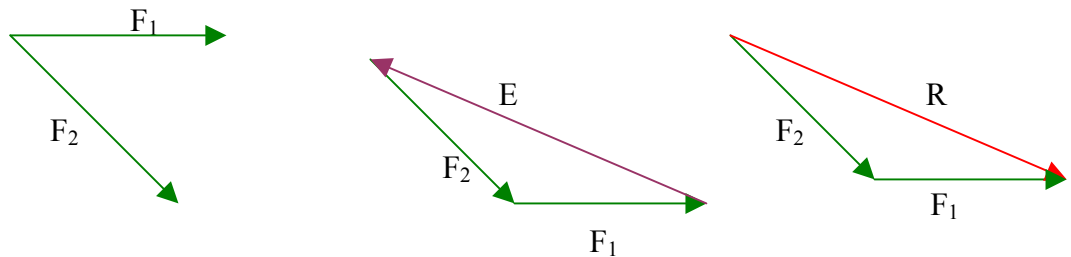
Dove $\alpha = \arctg h / b/2$

La risultante di due forze si può anche rappresentare mediante il **triangolo di equilibrio**:

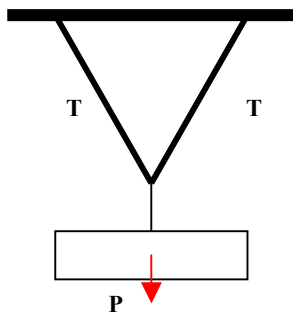


Si dispongono le forze parallelamente alle stesse in modo che i versi si rincorrano e la risultante si ottiene unendo l'inizio della prima con la fine della seconda. Il verso della risultante sarà tale da andare incontro alle forze.

Se si dispone il verso della risultante al contrario si ottiene l'**Equilibrante** cioè la forza uguale ed opposta alla risultante. Quindi se si vuole trovare l'equilibrante, nel triangolo di equilibrio, i versi si devono rincorrere:

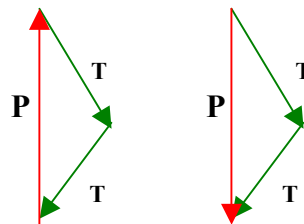


L'equilibrante ha importanza quando si vogliono equilibrare diverse forze con una sola, per esempio se si vuole sapere quale è la forza che equilibra dei carichi inclinati:

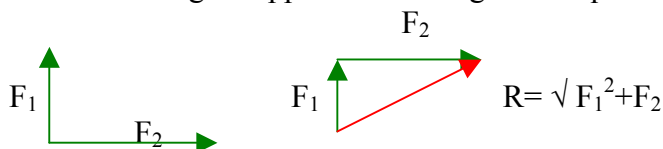


Il carico P rappresenta l'equilibrante delle degli due sforzi T che nascono nelle due aste inclinate.

Se è noto il carico P lo sforzo T si può ricavare graficamente scomponendo la forza P nelle due direzioni parallele alle aste inclinate:

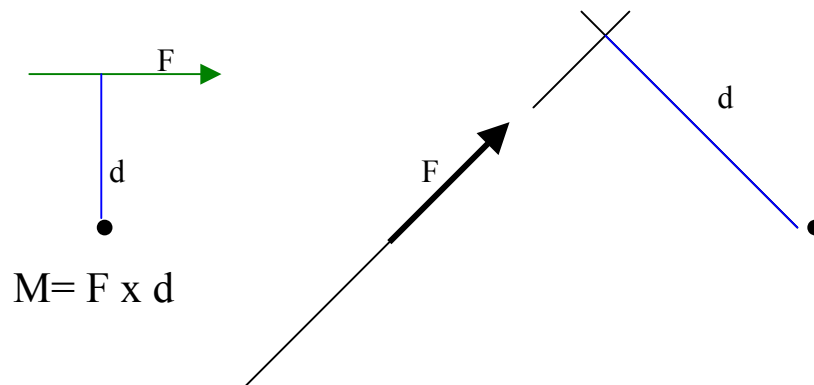


Altro concetto molto importante è che **“la forza da sola non esiste mai”**. Cioè ogni qualvolta in un corpo è applicata una forza, se questo è vincolato a non muoversi, nello stesso istante si crea un'altra forza uguale ed opposta alla prima. Se la forza applicata fosse sola il corpo si muoverebbe. Quando due forze sono fra di loro perpendicolari, la risultante si può ricavare analiticamente mediante il Teorema di Pitagora applicato al triangolo di equilibrio:



MOMENTO DI UNA FORZA

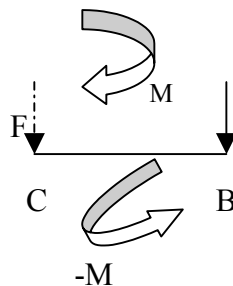
Si definisce Momento di una forza rispetto ad un punto detto polo, il prodotto dell'intensità della forza per la minima distanza fra essa ed il polo. La minima distanza si ottiene tracciando, partendo dal polo, la perpendicolare alla direzione della forza:



Per convenzione si assume positivo il momento che provoca una rotazione oraria e negativo quello che provoca una rotazione antioraria.

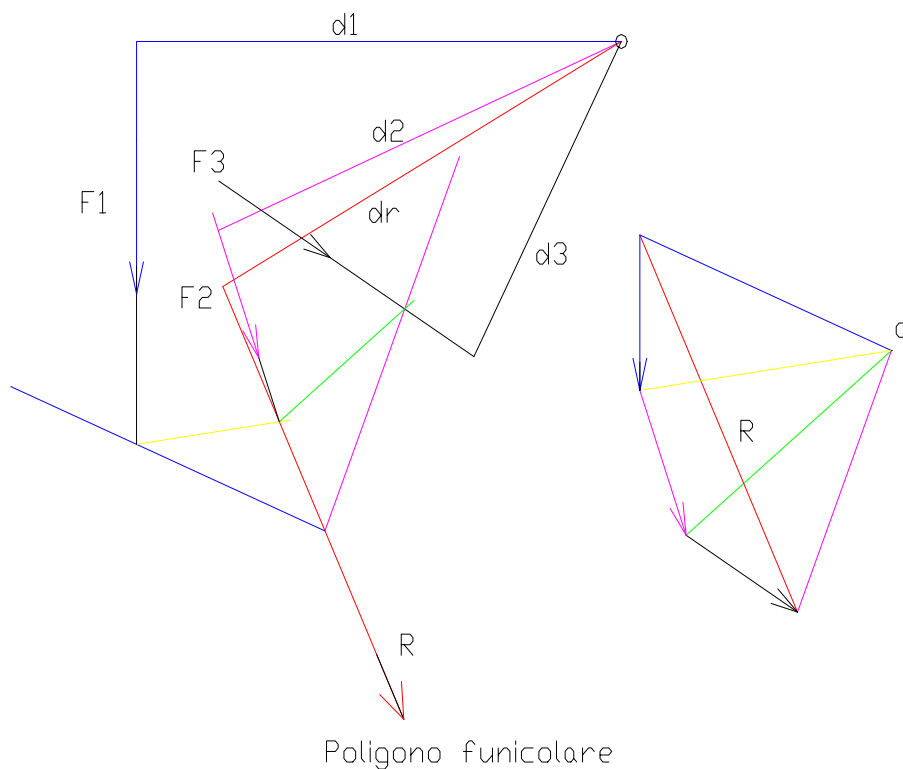
MOMENTO DI TRASPORTO:

Nel punto C è applicata una forza F, se si sposta la forza dal punto C in un altro punto B posto a distanza e dal primo punto, la forza creerà un momento $M = F \times e$ (che si chiama **momento di trasporto**); per cui nel punto C avremo oltre alla forza F anche un momento M. Per cui se vogliamo che nel punto C ci sia solo l'effetto della forza F bisognerà annullare il momento M che si è creato introducendo un altro momento $-M$. Viceversa se vogliamo riportare la forza F dal punto B al punto C bisogna aggiungere il momento di trasporto M.



TEOREMA DI VARIGNON

Dato un sistema di forze (due o più forze qualsiasi e comunque disposte), ed un punto assegnato (polo), la sommatoria del momento delle singole forze rispetto allo stesso polo è pari al momento della risultante di tutte le forze fatto rispetto allo stesso polo.



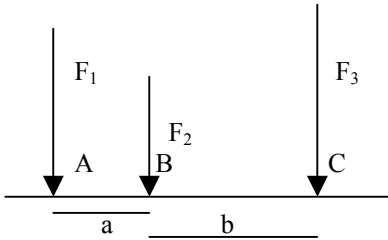
Si trova quindi la risultante (per esempio con il poligono funicolare)

Si misura in scala la distanza fra il polo P e la risultante, quindi si calcola il momento della risultante $M_r = R \times dr$; questo dovrà essere uguale alla **sommatoria** dei momenti delle singole forze prima calcolato. Cioè dovrà risultare :

$$\sum M_p = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 = R \times dr$$

Applicazione del Teorema di Varignon:

Si vuole trovare analiticamente la posizione della risultante di più forze parallele.

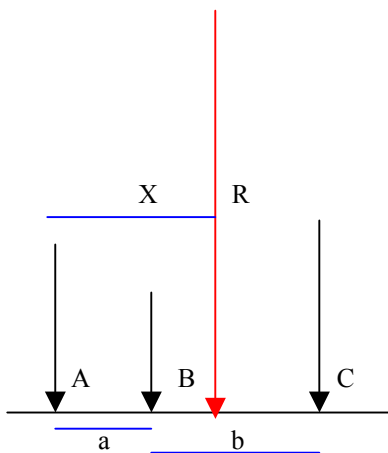


Si calcola la sommatoria dei momenti rispetto ad un punto qualsiasi, per esempio il punto A :

$$\sum M_A = F_1 \times 0 + F_2 \times a + F_3 \times (a + b)$$

questa sommatoria per il Teorema di Varignon deve essere uguale al momento della risultante (M_R) di cui non conosciamo la posizione che indichiamo con X.

Sappiamo però che la risultante R deve trovarsi compresa fra F_1 ed F_3 e la posizioniamo a caso a distanza X dal punto A; inoltre è $R = F_1 + F_2 + F_3$



Il momento della risultante è $R \times X$; quindi $R \times X = \sum M_A$ da cui si ricava $X = \sum M_A / R$.

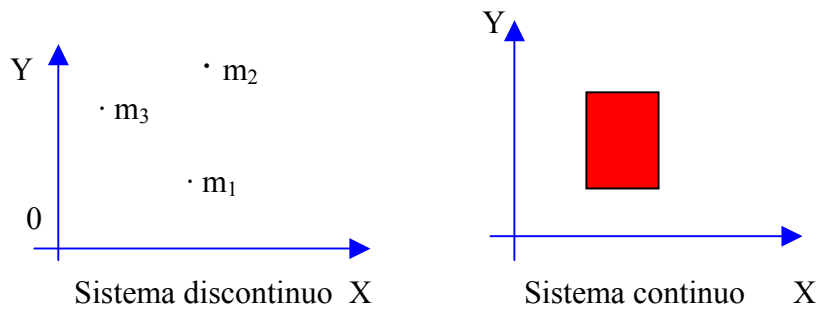
DISPENSA N° 2

GEOMETRIA DELLE MASSE

Si prende in considerazione un sistema piano, ossia giacente nel piano x-y.

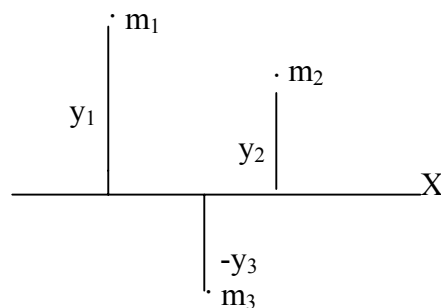
Un insieme di masse posizionato nel piano X-Y, rappresentato da punti individuati dalle loro coordinate cartesiane x_i ; y_i , rappresenta un sistema discontinuo di masse. Si può immaginare anche che ogni punto sia rappresentativo di una massa o di una superficie.

Una figura piana, individuata da una figura geometrica regolare o non costituita tutta da punti infinitamente vicini fra di loro, rappresenta un sistema continuo.

**CONCETTO DI MOMENTO STATICO**

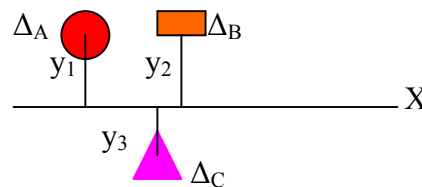
Il momento statico di una grandezza (che può essere una massa, una forza, un'area o qualsiasi altra grandezza) rispetto ad un asse X è il prodotto della grandezza per la minima distanza fra il baricentro della grandezza e l'asse X. Per esempio il momento statico di una massa m_1 rispetto all'asse X è: $S_x = m_1 \times y_1$

e per un sistema di masse è:



$$S_x = m_1 \times y_1 + m_2 \times y_2 - m_3 \times y_3 ;$$

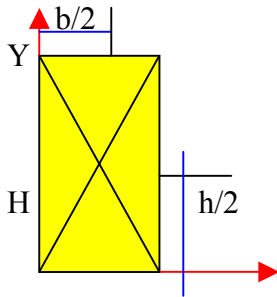
per un sistema di areole è:



$$S_x = \Delta_A \times y_1 + \Delta_B \times y_2 + \Delta_C \times y_3 =$$

Il momento statico può essere positivo, negativo o nullo. Esso è **sempre nullo** se è fatto rispetto all'**asse baricentrico**.

Momento Statico di un rettangolo rispetto agli assi tangenti:

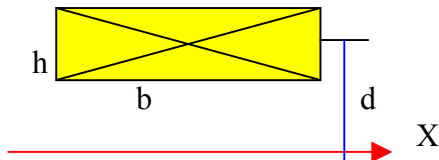


$$S_x = A \times h/2 = b \times h \times h/2 = b \times h^2/2$$

$$S_y = A \times b/2 = b \times h \times b/2 = b^2 \times h/2$$

Momento Statico di un rettangolo rispetto ad un asse esterno.

d = distanza fra il baricentro del rettangolo e l'asse X.



$$S_x = A \times d = b \times h \times d$$

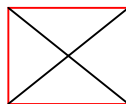
Il momento statico è un momento del 1° ordine in quanto la distanza per cui si moltiplica la grandezza è elevata alla 1° potenza. Il momento di una forza rispetto ad un punto visto precedentemente è un momento del 1° ordine. **Il momento statico di una figura si misura in m^3 in quanto è uguale all'area (m^2) moltiplicato una distanza (m): $m^2 \times m = m^3$.**

IL BARICENTRO

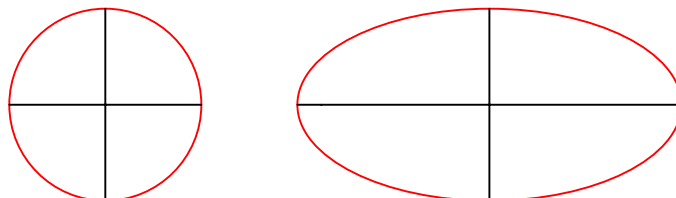
Il baricentro di un corpo è quel punto in cui si immagina applicata la sua forza peso. Se abbiamo un corpo di una certa dimensione possiamo per alcuni calcoli sostituire il corpo con un punto materiale ubicato nel suo baricentro in cui applichiamo una forza proporzionale al proprio peso.

Baricentro di semplici figure piane:

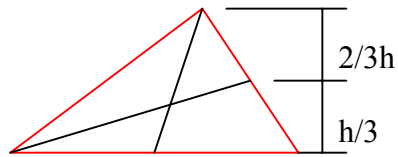
- **Rettangolo o quadrato:** punto d'incontro delle diagonali o degli assi di simmetria-



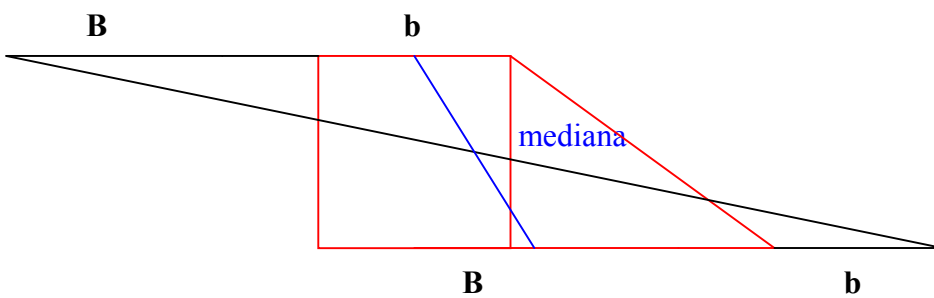
- **Cerchio ed Ellisse :** centro della figura geometrica – punto d'incontro degli assi di simmetria.



- **Triangolo:** punto d'incontro delle mediane (ne basta tracciare due); nel triangolo il baricentro è situato ad $h/3$ partendo dalla base e a $2/3h$ partendo dal vertice opposto alla base.

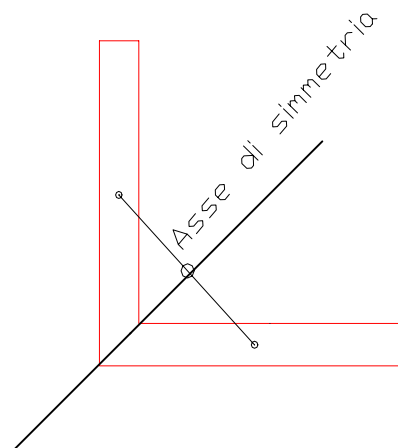
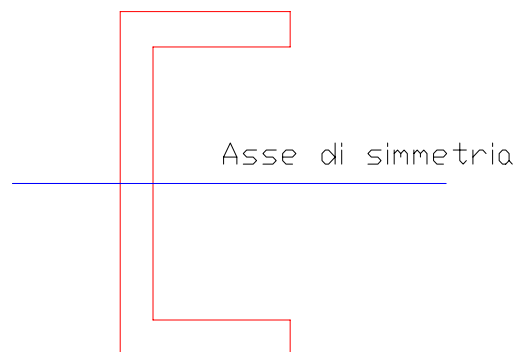
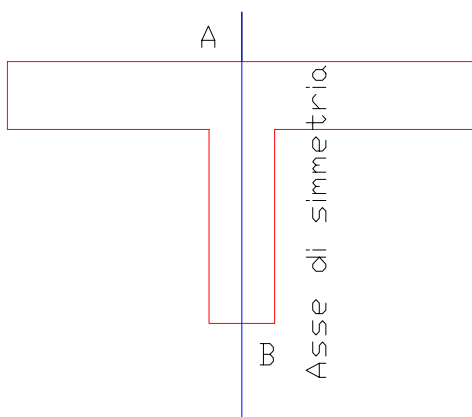


- **Trapezio rettangolo ed isoscele:**



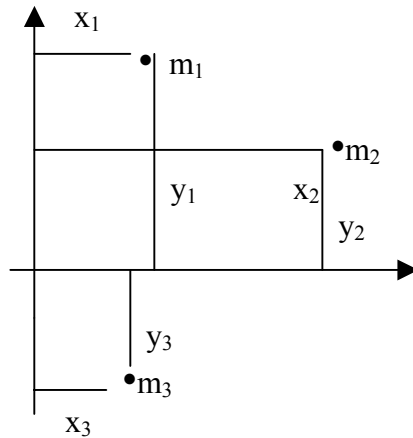
Se una figura ha un asse di simmetria il baricentro si trova su quest'asse. Se la figura ha due assi di simmetria il baricentro si trova nel loro punto d'incontro.

Una sezione a T ha un solo asse di simmetria per cui il baricentro si troverà su quest'asse, ma non sappiamo l'esatta posizione, sappiamo solo che è dentro la figura fra il punto A ed il punto B:



Baricentro di un sistema discontinuo:

Il baricentro in un sistema di masse si può trovare sia **analiticamente** che **graficamente**.

**ANALITICAMENTE:**

Si calcola il momento statico del sistema di masse rispetto all'asse X e rispetto all'asse Y.

$$S_x = m_1 \times y_1 + m_2 \times y_2 + m_3 \times y_3 = \sum m_i \times y_i$$

$$S_y = m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2 + m_3 \times x_3 = \sum m_i \times x_i$$

Per il teorema di Varignon $\sum (m_i \times y_i) =$ Momento statico della massa risultante rispetto all'asse X = $(\sum m_i) \times y_G$; da cui si ricava $y_G = S_x / \sum m_i$;

$\sum (m_i \times x_i) =$ Momento statico della massa risultante rispetto all'asse Y = $(\sum m_i) \times x_G$; da cui si ricava $x_G = S_y / \sum m_i$.

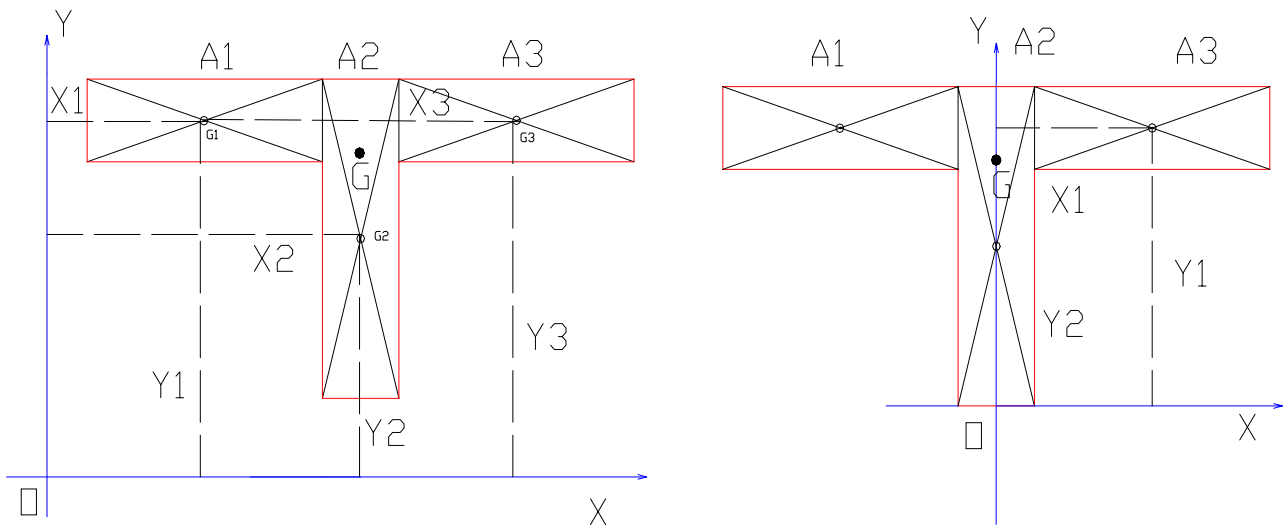
GRAFICAMENTE:

- si sostituiscono alle masse puntiformi, dei vettori proporzionali alle stesse, in una direzione a piacere (per esempio orizzontale), ma tutte parallele fra di loro. Si disegna il poligono funicolare di questi vettori e si determina la posizione della risultante.
- si ruotano i vettori tutti dello stesso angolo, disponendoli in un'altra direzione a piacere (per esempio verticale) e si ridisegna il poligono funicolare trovando la nuova direzione della risultante.
- Il punto d'incontro delle due direzioni delle risultanti è il baricentro cercato.

Questi stessi metodi (analitico e grafico) si possono applicare anche ai sistemi continui.

Per esempio:

- Ricerca analitica del baricentro di una figura a T



$$S_x = A_1 \times Y_1 + A_2 \times Y_2 + A_3 \times Y_3 ; \quad S_y = A_1 \times X_1 + A_2 \times X_2 + A_3 \times X_3 ; \quad A = (A_1 + A_2 + A_3)$$

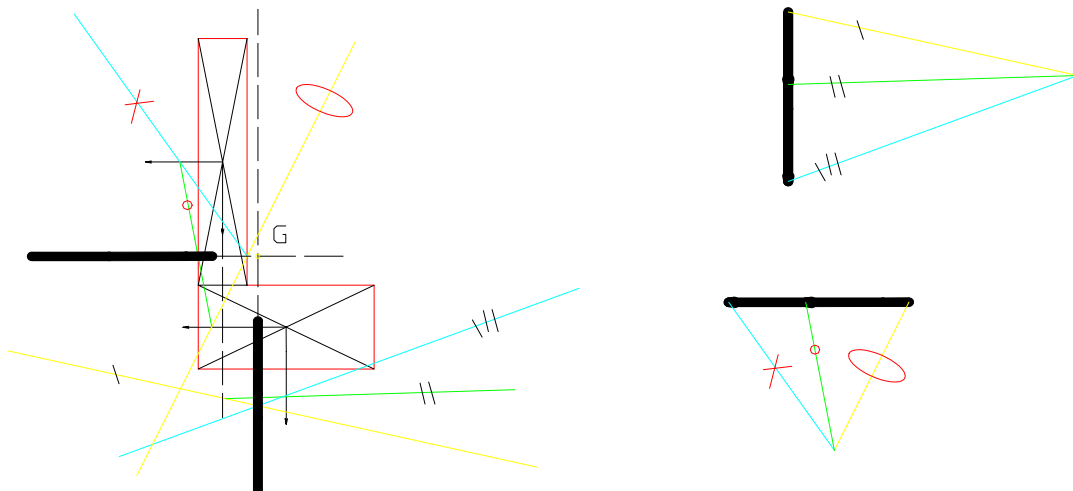
$$X_G = S_y / A ; \quad Y_G = S_x / A$$

Se si assume l'asse X tangente alla base e l'asse Y coincidente con l'asse di simmetria, il calcolo si semplifica:

$$S_x = (A_1 + A_3) \times Y_1 + A_2 \times Y_2 ;$$

$$X_G = 0 ; \quad Y_G = S_x / A$$

- Ricerca grafica del baricentro di una figura a L



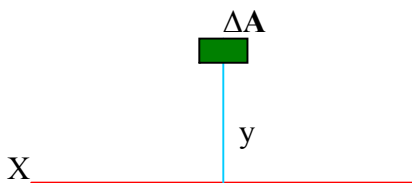
MOMENTO D'INERZIA

Si definisce momento d'inerzia di una grandezza rispetto ad un asse, il prodotto della grandezza per il quadrato della minima distanza fra la grandezza e l'asse.



$J_x = m x y^2 = m x y x y = (m x y) x y$; ma il prodotto $(m x y)$ rappresenta il momento statico S_x della massa m rispetto all'asse X ; per cui $J_x = S_x x y$ (cioè il prodotto del momento statico per una distanza) quindi il momento d'inerzia si può intendere come il momento statico del momento statico.

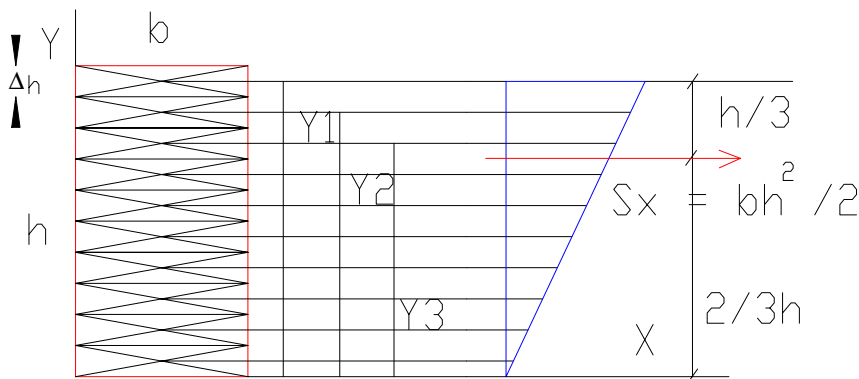
Se ΔA è un'areola infinitamente piccola si può assimilare ad un punto materiale e si può calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse X come $J_x = \Delta A x y^2$. **Se però ΔA è un'area abbastanza grande non si può più calcolare il suo momento d'inerzia come anzidetto, ma bisogna procedere in maniera diversa.**



Osservazione: Il momento d'inerzia è il prodotto di una grandezza per una distanza al quadrato, per cui anche se la distanza è negativa **il momento d'inerzia sarà sempre positivo**. Solo in un caso è nullo, cioè quando si calcola il m.i. di una massa puntiforme rispetto all'asse che la contiene.

Momento d'Inerzia del rettangolo

a) rispetto ad un asse tangente ad un lato:



Si divide il rettangolo in tante striscioline piccolissime, alte Δh e larghe b ; ogni strisciolina avrà area $\Delta A = b \Delta h$; di ogni strisciolina si può calcolare il momento statico rispetto all'asse X $S_{x1} = \Delta A x y_1$; $S_{x2} = \Delta A x y_2$; $S_{x3} = \Delta A x y_3$

Si riporta a fianco del rettangolo, parallelamente all'asse X, in scala, il valore del momento statico di ogni striscioline. Questi valori vanno decrescendo verso il basso perché diminuisce la relativa distanza dall'asse. Si ottiene così un diagramma triangolare che rappresenta come varia il momento statico di tutte le striscioline (cioè del rettangolo) al variare della distanza dall'asse X.

Ora sappiamo che la risultante del diagramma triangolare, che rappresenta il momento statico di tutte le striscioline (cioè del rettangolo rispetto all'asse X, S_x) è applicata ad $1/3$ dell'altezza partendo dalla base e a $2/3$ dell'altezza partendo dal vertice opposto situato sull'asse X.

Ma il momento d'inerzia non è altro che il momento statico del momento statico, per cui per ottenere il momento d'inerzia del rettangolo rispetto all'asse X, basta fare il momento statico del momento statico del rettangolo rispetto all'asse X, cioè moltiplicare S_x x la distanza che va dal baricentro del diagramma triangolare all'asse X.

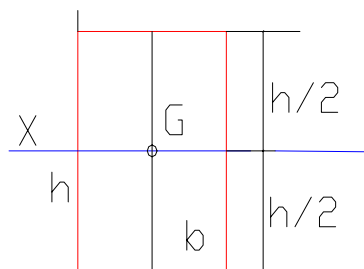
$$J_x = S_x \times 2/3 h$$

Essendo $S_x = b \times h^2 / 2$ si avrà:

$$J_x = b \times h^2 / 2 \times 2/3 h = \mathbf{b h^3 / 3}$$

Analogamente per l'asse Y tangente all'altro lato $J_y = \mathbf{h b^3 / 3}$

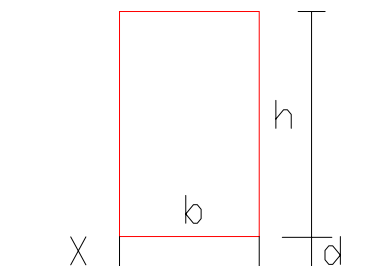
b) rispetto all'asse baricentrico



Il rettangolo di base b ed altezza h può essere immaginato come unione di due rettangoli di base b ed altezza h/2, entrambi tangenti all'asse X_G :

$$J_{XG} = b \times (h/2)^3 / 3 + b \times (h/2)^3 / 3 = 2 \times b \times (h/2)^3 = \mathbf{bh^3 / 12}$$

c) rispetto ad un asse esterno alla figura, ma parallelo ad un lato:



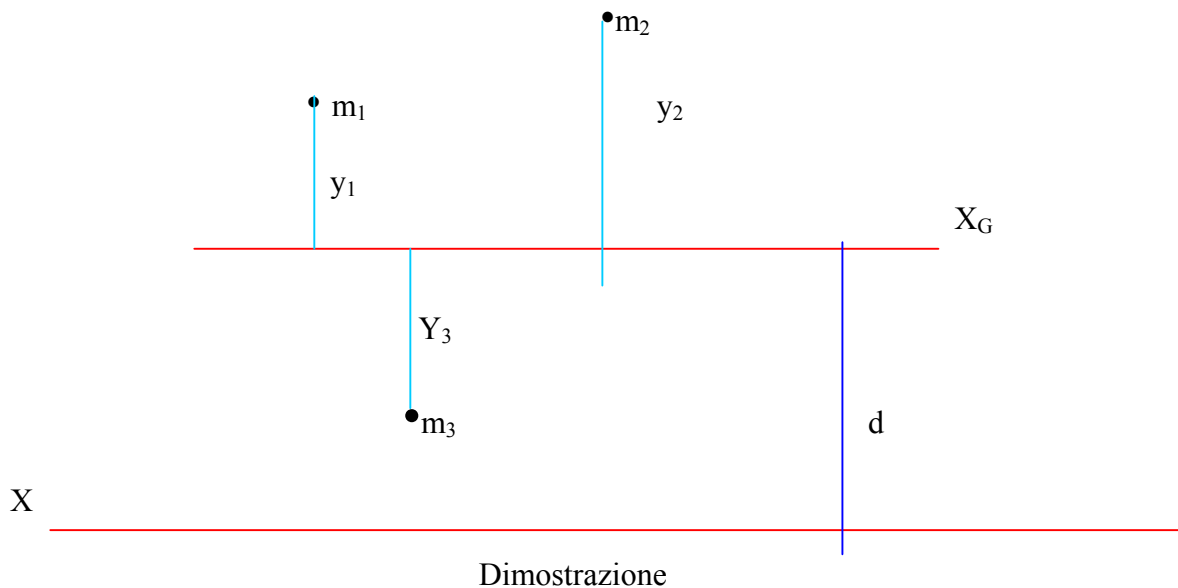
Il rettangolo di base b ed altezza h può essere immaginato come differenza del rettangolo di base b ed altezza (h+d) ed il rettangolo (vuoto) avente base b ed altezza d:

$$J_{XG} = \mathbf{b \times (h + d)^3 / 3 - b \times d^3 / 3}$$

Il momento d'inerzia di una figura si misura in m^4 in quanto è uguale all'area (m^2) moltiplicato una distanza al quadrati (m^2): $m^2 \times m^2 = m^4$.

Teorema del Trasporto

Il momento d'inerzia di un sistema di masse (o di una figura piana) rispetto ad un'asse non passante per il baricentro del sistema (o della figura) e distante d da esso è uguale al momento d'inerzia del sistema (o della figura) fatto rispetto al suo baricentro più la somma delle masse (o l'area della figura) per la distanza elevata al quadrato fra il baricentro e l'asse attorno al quale si vuole calcolare il momento d'inerzia.



$$J_x = m_1 \times (y_1 + d)^2 + m_2 \times (y_2 + d)^2 + m_3 \times (d - y_3)^2 = m_1 \times (y_1^2 + d^2 + 2 y_1 \times d) + m_2 \times (y_2^2 + d^2 + 2 y_2 \times d) + m_3 \times (d^2 + y_3^2 - 2 d \times y_3) =$$

$$= m_1 \times y_1^2 + m_1 \times d^2 + 2 \times m_1 \times y_1 \times d + m_2 \times y_2^2 + m_2 \times d^2 + 2 \times m_2 \times y_2 \times d + m_3 \times d^2 + m_3 \times y_3^2 - 2 \times m_3 \times d \times y_3 =$$

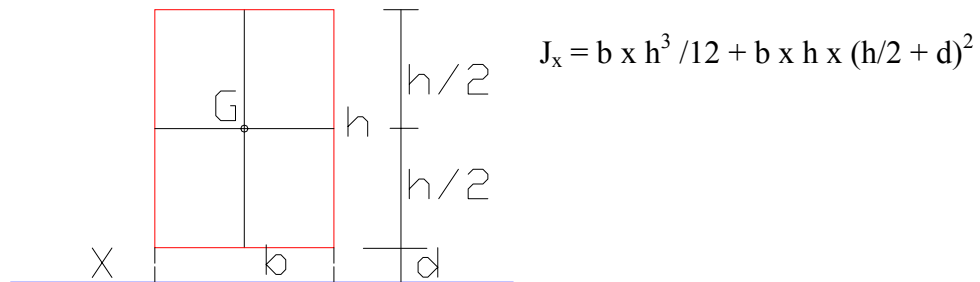
$$= (m_1 \times y_1^2 + m_2 \times y_2^2 + m_3 \times y_3^2) + (m_1 + m_2 + m_3) \times d^2 + 2 d \times (m_1 \times y_1 + m_2 \times y_2 - m_3 \times y_3) =$$

- il primo termine rappresenta la somma dei momenti d'inerzia di ogni singola massa rispetto all'asse baricentrico, quindi è il momento d'inerzia baricentrico del sistema di masse J_G ;
- il secondo termine rappresenta la sommatoria delle masse per la distanza al quadrato $\Sigma m \times d^2$
- il terzo termine è uguale a zero in quanto rappresenta il doppio prodotto della distanza per la somma dei momenti statici rispetto all'asse baricentrico (si ricorda che il momento statico baricentrico è sempre nullo.

Pertanto si avrà:

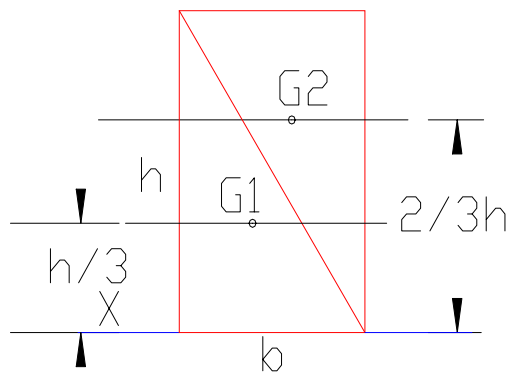
$$J_x = J_G + \Sigma m \times d^2$$

Il teorema del trasporto può essere utilizzato per calcolare il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse esterno alla figura



Momento d'inerzia del triangolo:

a) rispetto all'asse baricentrico



Immaginiamo di avere un rettangolo formato da due triangoli uguali sovrapposti. Il momento d'inerzia di questo rettangolo rispetto all'asse X, tangente alla base dello stesso rettangolo, che è anche base del triangolo è: $J_R = b \times h^3 / 3$ e sarà uguale alla somma dei momenti d'inerzia dei due triangoli J_1 e J_2 , fatti rispetto all'asse X. Quindi $J_R = b \times h^3 / 3 = J_1 + J_2$

Indichiamo con J_G il momento d'inerzia di un triangolo rispetto al suo baricentro. Esso è uguale per i due triangoli.

Calcoliamo il momento d'inerzia J_1 del triangolo superiore rispetto all'asse X. Si può applicare il teorema del trasporto : $J_1 = J_G + (b \times h / 2) \times (2/3 h)^2$.

Calcoliamo il momento d'inerzia J_2 del triangolo inferiore rispetto all'asse X. Si può applicare il teorema del trasporto : $J_2 = J_G + (b \times h / 2) \times (h/3)^2$.

Per quanto sopra detto possiamo scrivere

$$J_R = b \times h^3 / 3 = J_1 + J_2$$

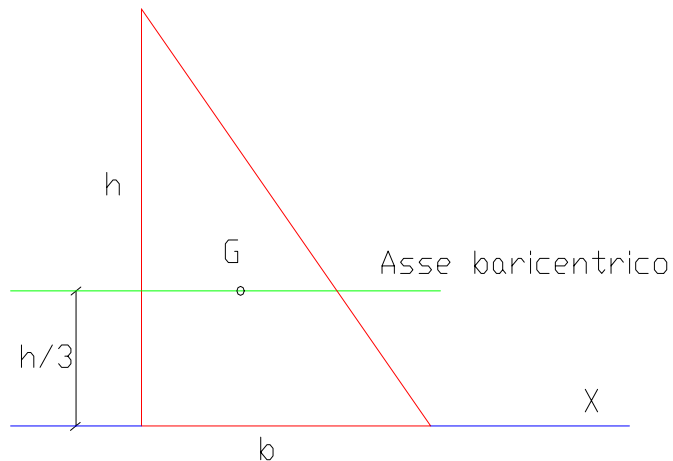
$$b \times h^3 / 3 = J_G + (b \times h / 2) \times (2/3 h)^2 + J_G + (b \times h / 2) \times (h/3)^2$$

$$b \times h^3 / 3 = 2 J_G + (b \times h / 2) \times (2/3 h)^2 + (b \times h / 2) \times (h/3)^2 \quad \text{da cui si ricava } J_G = b \times h^3 / 36$$

b) rispetto all'asse tangente alla base

Sappiamo che il momento d'inerzia baricentrico è $J_G = b \times h^3 / 36$; applicando il teorema del Trasporto si avrà:

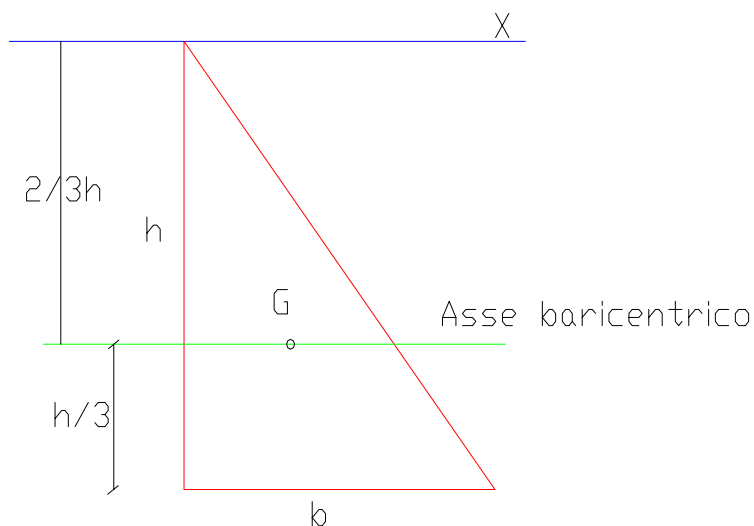
$$\mathbf{J_x = J_G + (b \times h / 2) \times (h/3)^2 = b \times h^3 / 36 + (b \times h / 2) \times (h/3)^2 = \mathbf{b \times h^3 / 12}$$



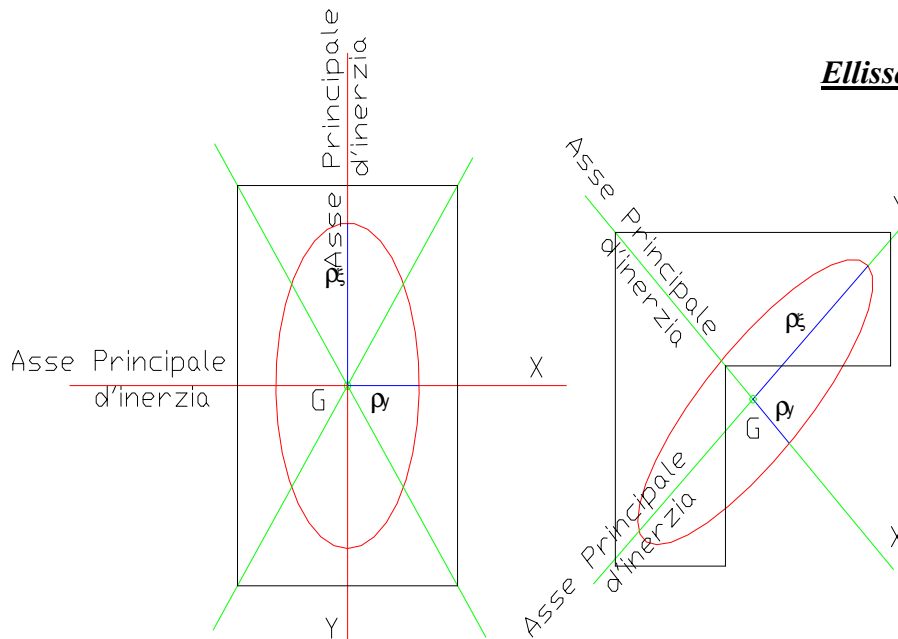
c) rispetto all'asse tangente ad un vertice:

Sappiamo che il momento d'inerzia baricentrico è $J_G = b \times h^3 / 36$; applicando il teorema del Trasporto si avrà:

$$\mathbf{J_x = J_G + (b \times h / 2) \times (2/3 h)^2 = b \times h^3 / 36 + (b \times h / 2) \times (2/3 h)^2 = \mathbf{b \times h^3 / 4}$$



Ellisse Centrale d'Inerzia



In ogni figura piana può essere rappresentata una ellisse il cui centro coincide con il baricentro della figura. Si chiama ellisse centrale d'inerzia in quanto il suo centro coincide con il baricentro della figura e mediante i suoi raggi si possono calcolare i momenti d'inerzia. I raggi ρ_x (maggiore) e ρ_y (minore) si calcolano con le formule:

$$\rho_x = \sqrt{J_x/A} ; \quad \rho_y = \sqrt{J_y/A}$$

Conoscendo i due raggi dell'ellisse o raggi d'inerzia si possono calcolare i momenti d'inerzia

$$J_x = A \times \rho_x^2 \quad \text{e} \quad J_y = A \times \rho_y^2$$

I due raggi d'inerzia ρ_x e ρ_y si trovano sui due diametri della ellisse, essi si chiamano anche principali perché stanno sugli assi principali (diametri); questi due assi hanno delle particolarità:

- passano entrambi per il baricentro della figura (centro dell'ellisse)
- sono perpendicolari fra di loro
- coincidono con gli assi di simmetria della figura (se ci sono)
- sono fra di loro coniugati, cioè ad uno corrisponde graficamente l'altro, secondo una costruzione geometrica. Ovvero conoscendo un'asse principale si può individuare l'altro graficamente.
- Il momento d'inerzia della figura fatto rispetto ad un asse principale è il massimo che si possa calcolare; quello fatto rispetto all'altro asse è il minimo che si possa calcolare. Per questo si chiamano assi principali.

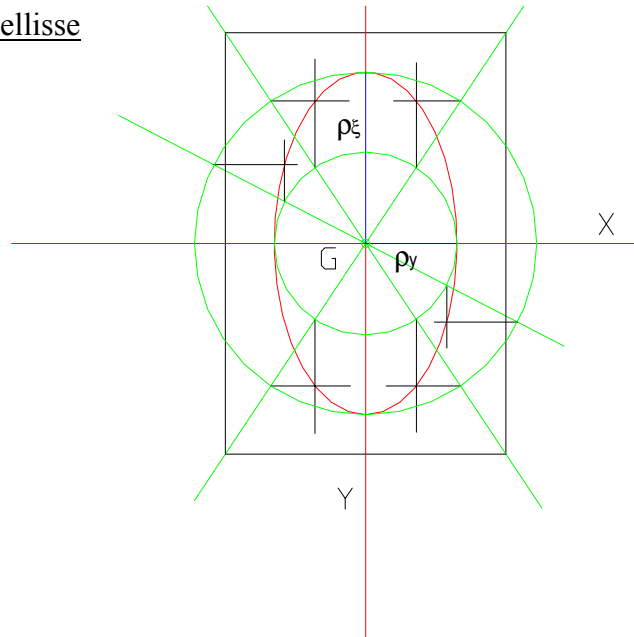
L'ellisse ammette infiniti assi passanti per il baricentro, si possono allora trovare infinite coppie di assi coniugati, e infinite coppie di assi perpendicolari fra loro, ma tra tutti questi infiniti assi soltanto due sono contemporaneamente coniugati e perpendicolari fra di loro: sono i due assi principali.

-Se una figura ha un asse di simmetria (per esempio una sezione a T) questo è un asse principale d'inerzia. L'altro asse si può subito trovare ricordando che deve passare per il baricentro ed essere perpendicolare al primo.

-Se una figura ha due assi di simmetria (per esempio un rettangolo, una sezione a doppio T) questi sono gli assi principali.-

Se la figura non ha assi di simmetria non è possibile trovare gli assi principali con quanto sopra detto, ma occorrono procedimenti più complessi.

Costruzione grafica dell'ellisse

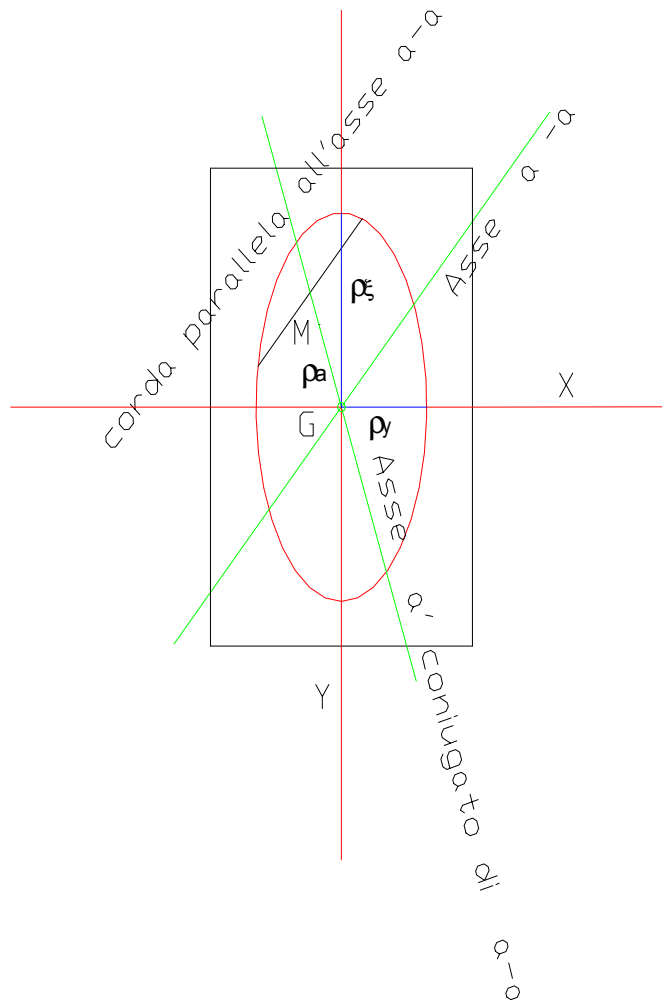


La conoscenza dell'ellisse centrale d'inerzia in una figura è di valido aiuto per calcolare il momento d'inerzia della figura rispetto ad un asse qualsiasi.

Infatti il momento d'inerzia di una figura rispetto ad un asse è dato dal prodotto dell'area della figura per il quadrato del raggio d'inerzia che si trova sull'asse coniugato dell'asse dato, in generale

$$J_a = A \times \rho_a^2$$

essendo A l'area della figura e ρ_a il raggio d'inerzia dell'ellisse che si trova sull'asse -a'-coniugato dell'asse -a-



Se si vuole calcolare il momento d'inerzia di una figura rispetto ad un asse $-a-a-$ inclinato ed esterno alla figura o comunque non passante per il baricentro si può applicare il teorema del trasporto, e sfruttare l'ellisse d'inerzia.

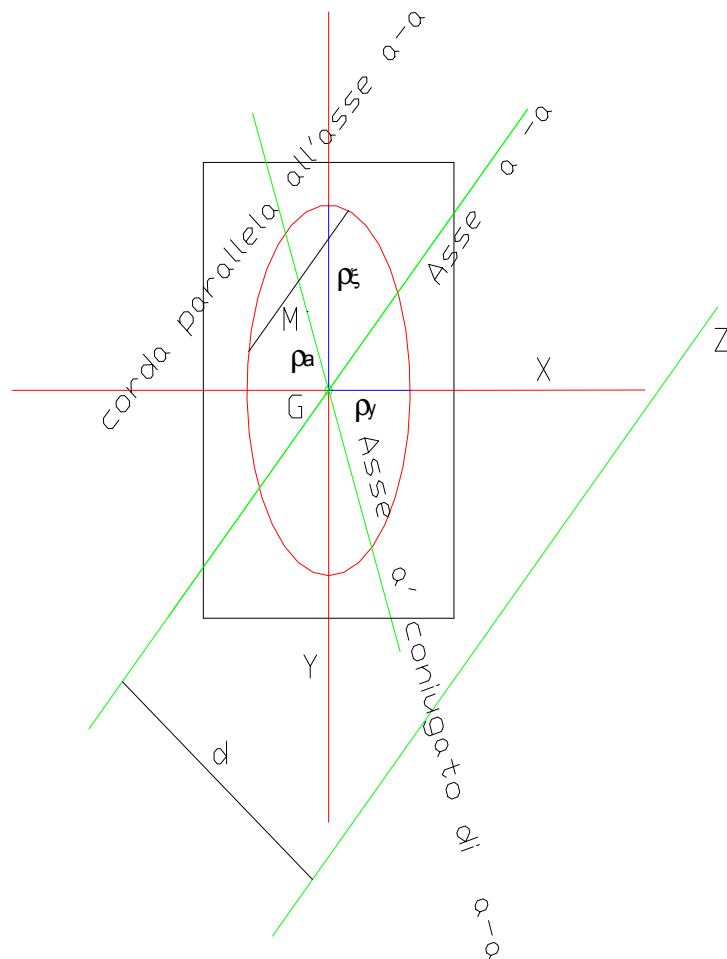
Per esempio nel caso del rettangolo si ha:

$$J_z = J_{Gz} + A \times d^2$$

Essendo A l'area del rettangolo

$J_{gz} = A \times p_z^2$ il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il baricentro e parallelo all'asse Z

d la distanza fra l'asse Z e il baricentro G



Momento d'Inerzia del Cerchio:

Il momento d'inerzia del cerchio di raggio R , rispetto a qualsiasi diametro vale: $J = \pi R^4 / 4$

Il momento d'inerzia di una corona circolare di raggio esterno R e raggio interno r si può ricavare come differenza fra il momento d'inerzia del cerchio di raggio R meno quello del vuoto di raggio r :

$$J = \frac{1}{4} \pi * (R^4 - r^4).$$

CASI PARTICOLARI DI ELLISSE:

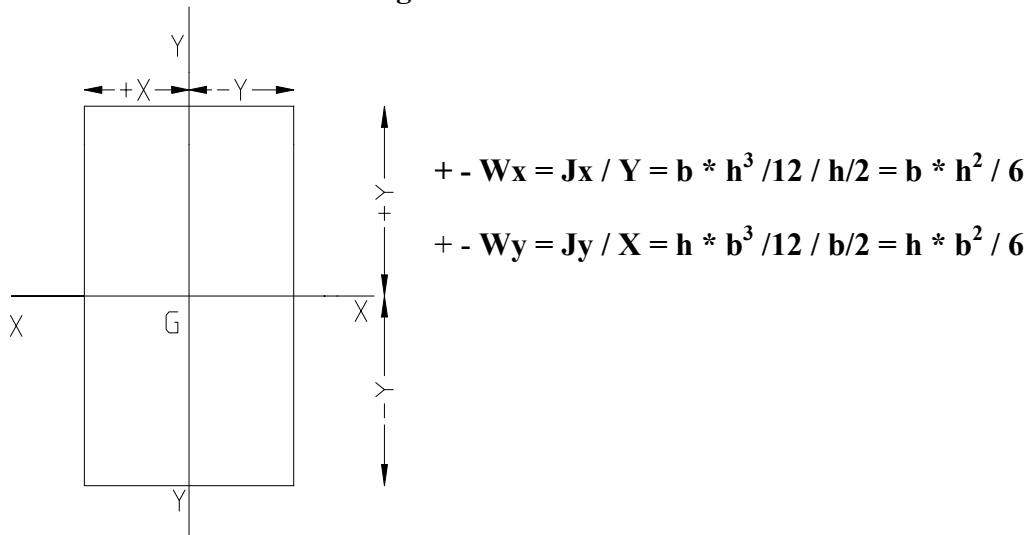
Cerchio: Nel cerchio di Raggio R l'ellisse centrale d'inerzia si riduce ad un cerchio. Tutti gli infiniti diametri sono diametri principali, così pure tutti i raggi. Il raggio d'inerzia $\rho = \sqrt{J/A} = R/2$.

Quadrato: Anche nel quadrato di lato l l'ellisse d'inerzia si riduce ad un cerchio. Il raggio d'inerzia $\rho = \sqrt{J/A} = l / \sqrt{12}$.

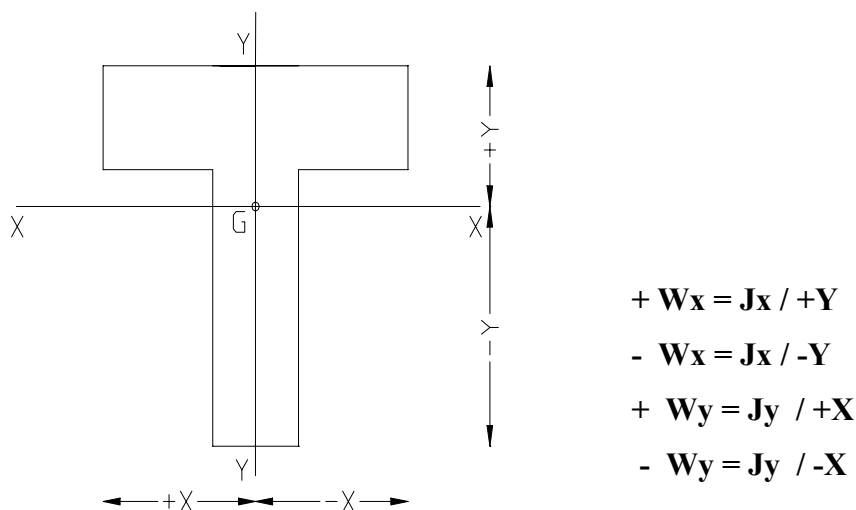
MODULO DI RESISTENZA

Si definisce **Modulo di resistenza (W)**, di una sezione rispetto all'asse baricentrico, il rapporto fra il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse e la distanza Y, dallo stesso al punto più lontano della figura. Ovviamente si avranno due valori della distanza +Y e -Y, quindi due valori del W per ogni sezione, uno positivo ed uno negativo.

ESEMPIO: Modulo di resistenza del rettangolo



ESEMPIO: Modulo di resistenza di una sezione a T:



DISPENSA N° 3

STATICA DEI CORPI RIGIDI

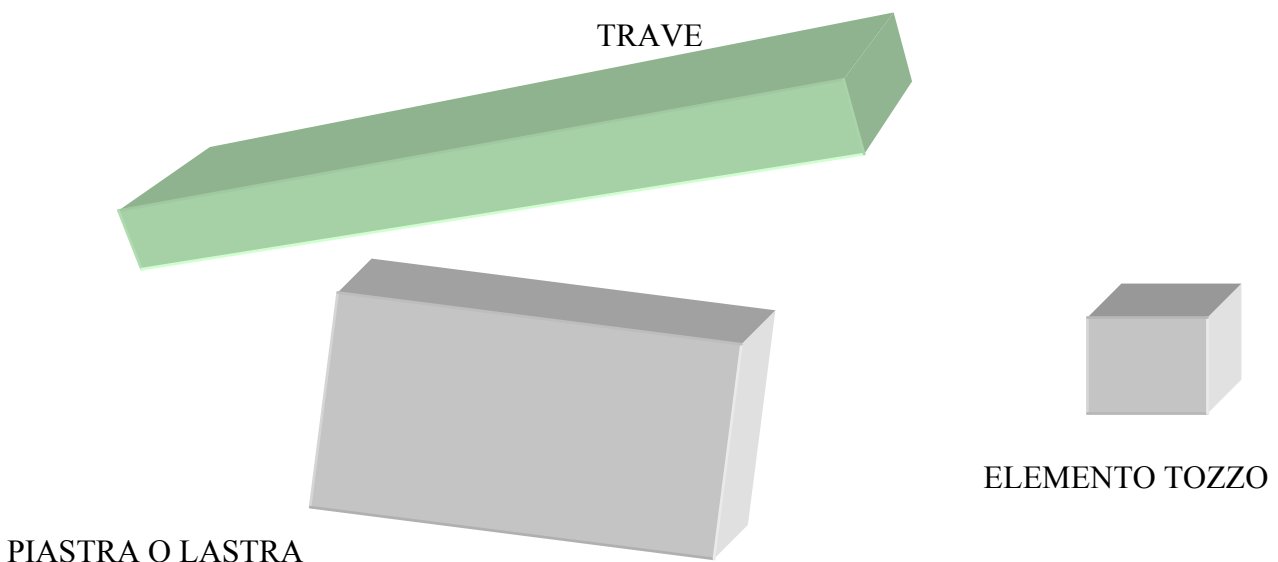
La Statica dei Corpi Rigidi si interessa dell'equilibrio dei corpi rigidi sollecitati da forze esterne. Per **Corpo Rigido** si intende un corpo perfettamente indeformabile, cioè che non si deforma qualunque sia la forza o il sistema di forze che lo sollecita. In pratica il corpo rigido perfetto non esiste, in quanto anche se il corpo è molto rigido se lo sottoponiamo a delle forze molto grandi, esso si deforma anche se di poco. Comunque, per i nostri calcoli, ammettiamo l'ipotesi che il corpo sia perfettamente rigido.

I corpi rigidi che ci interessano sono gli elementi strutturali cioè le parti o insieme di parti di una struttura che costituisce una costruzione (Edificio, Ponte, Terreno ecc.).

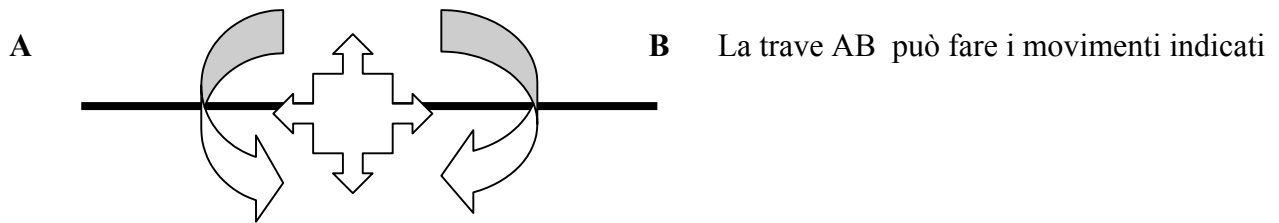
I corpi rigidi (corpi) hanno tre dimensioni (lunghezza, altezza e larghezza), per semplicità di calcolo noi schematizzeremo questi corpi in :

- **Corpi monodimensionali o elementi Trave**
Sono quei corpi in cui una delle tre dimensioni è molto più grande delle altre due per esempio una trave o un pilastro. Questo corpo si schematizza con una linea che è la sua linea d'asse, cioè la congiungente i baricentri delle sezioni.
- **Corpi bidimensionali o elementi Piastra (Lastra)**
Sono quei corpi in cui una dimensione è molto più piccola delle altre due per esempio un solaio o una parete.
- **Corpi tridimensionali o elementi tozzi**
Sono quei corpi in cui le tre dimensioni sono quasi uguali, per esempio un plinto di fondazione, o una mensola molto corta.

La teoria che noi studieremo cioè la teoria della trave di Saint-Venant si applica solo agli elementi trave. Gli altri corpi si studiano con i metodi della Scienza delle Costruzioni. Comunque per i semplici calcoli che ci riguardano, ai corpi bidimensionali, quando li dovremo studiare, applicheremo delle ipotesi semplificative, e li calcoleremo come travi. Per i corpi tridimensionali si faranno delle approssimazioni a parte.

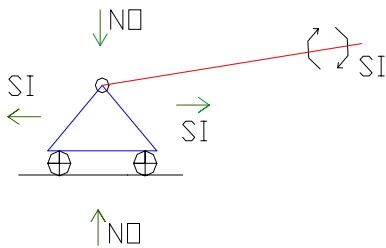


Un corpo rigido nel piano ha **tre gradi di libertà** cioè vuol dire che può fare tre movimenti: uno spostamento orizzontale, uno spostamento verticale e una rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano.

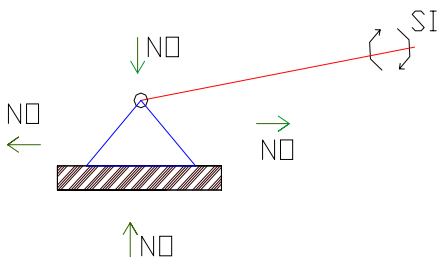


Per mantenere in equilibrio la trave, occorre bloccare tutti e tre i movimenti. Questo si può fare mettendo dei **vincoli** alla trave. I vincoli sono altri corpi capaci di bloccare uno o più movimenti, in quanto esercitano delle forze che si chiamano **reazioni vincolari**.

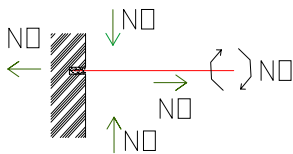
I vincoli più usati sono:



Carrello o cerniera mobile (blocca solo lo spostamento verticale, fornisce una reazione vincolare)



Cerniera (blocca sia lo spostamento verticale che orizzontale, fornisce due reazioni vincolari)



Incastro (blocca tutti e tre gli spostamenti, fornisce tre reazioni vincolari)

Una trave senza vincoli, oppure con vincoli insufficienti, si muove e si dice che è **labile**.

Per bloccare una trave, cioè per renderla **isostatica**, è sufficiente mettere un incastro oppure una cerniera assieme ad un carrello. Se la trave viene bloccata con più vincoli di quanto sarebbero strettamente necessari, essa diventa **iperstatica**.

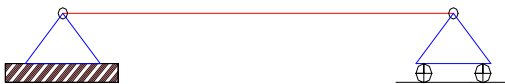
Per esempio una trave orizzontale vincolata con due carrelli è labile, perché se si mette una forza orizzontale essa si sposta. Una trave vincolata con un carrello ed una cerniera oppure con un solo incastro è isostatica in quanto non può fare nessun movimento. Se la trave si vincola ad esempio con due cerniere essa è iperstatica.

In altre parole sappiamo che una trave nel piano può fare tre movimenti (X,Y,R) per bloccare la trave occorre ed è sufficiente bloccare solo i tre movimenti, mediante tre reazioni vincolari. Sappiamo inoltre che il carrello blocca 1 movimento; la cerniera ne blocca 2 e l'incastro ne blocca 3 di movimenti. Quando i vincoli messi sono tali da fornire in tutto 3 reazioni vincolari, la trave è isostatica. Quando il totale delle reazioni vincolari è > 3 la trave è iperstatica; quando il totale delle reazioni vincolari è < 3 la trave è labile.

ESEMPI DI TRAVI VINCOLATE



Trave labile : Reazioni vincolari < 3



Trave isostatica : Reazioni vincolari = 3



Trave iperstatica : Reazioni vincolari > 3

Attenzione che alcune volte anche se il numero delle reazioni vincolari è $= 3$ la trave può risultare lo stesso labile, perché come in questo caso un carrello è stato posizionato male.



Se disponendo i vincoli essi forniscono 4 reazioni vincolari (cioè 1 in più di quelle necessarie) la trave si dice 1 volta iperstatica. Se le reazioni vincolari in più sono 2 la trave si dice 2 volte iperstatica e così via. **Risolvere una trave vuol dire determinare le reazioni vincolari.**

Noi considereremo soltanto le travi isostatiche, in quanto non ci interessa una trave labile, mentre le travi iperstatiche si risolvono con i metodi della Scienza della Costruzioni.

Un corpo come sappiamo ha tre gradi di libertà, cioè può fare tre movimenti. Per l'equilibrio del corpo è allora necessario che siano verificate **le tre equazioni cardinali della statica** :

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

La prima equazione vuol dire che la somma di tutte le forze orizzontali applicate alla trave deve essere uguale a zero. ([Sommatoria](#) delle $X = 0$).

La seconda equazione vuol dire che la somma di tutte le forze verticali applicate alla trave deve essere uguale a zero. ([Sommatoria](#) delle $Y = 0$).

La terza equazione vuol dire che la somma dei momenti di tutte le forze (orizzontali e verticali) **rispetto ad un punto qualunque del piano**, e di tutti i momenti applicati alla trave deve essere uguale a zero. ([Sommatoria](#) dei $M = 0$).

Ora se abbiamo una trave isostatica in cui ci sono tre reazioni vincolari da determinare (X,Y,M) e applichiamo il sistema formato dalle tre equazioni cardinali della statica, il sistema si può risolvere facilmente e possiamo calcolare le tre incognite (X,Y,M).

Se invece abbiamo una trave, per esempio, 1 volta iperstatica, succede che avremo 4 incognite da calcolare (le 4 reazioni vincolari), ma le equazioni fornite dalla statica sono solo 3 (le 3 equazioni cardinali) per cui matematicamente non esiste modo di risolvere il sistema. Occorre allora trovare un'altra equazione da aggiungere alle prime tre, così avremo 4 equazioni in 4 incognite. Questa quarta equazione si chiama equazione ausiliaria (di aiuto). Vedremo più avanti come si risolve una semplice struttura 1 volta iperstatica (l'arco a tre cerniere).

Se abbiamo una trave iperstatica 2 volte o 3 volte o 4 volte ecc., occorre scrivere relativamente altre 2 o 3 o 4 equazioni ausiliarie. Se si pensa ai telai delle strutture in c.a. che hanno un alto grado di iperstaticità (anche 100 o più) occorrerebbe scrivere altre 100 o più equazioni ausiliarie oppure ricorrere ad altri metodi di risoluzione specifici con l'aiuto del computer. E' questo il motivo per cui nei tempi passati le strutture intelaiate non avevano largo sviluppo, in quanto richiedevano procedimenti di calcolo lunghissimi, dovendo risolvere anche centinaia di equazioni manualmente. L'avvento delle macchine calcolatrici e dei computer ha superato questa difficoltà.

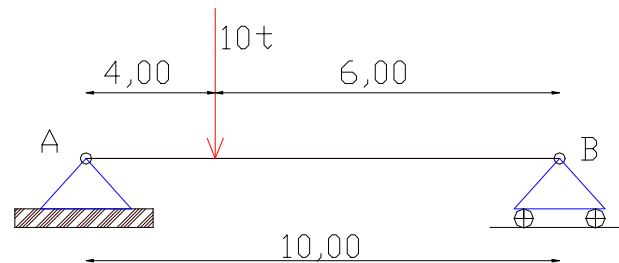
Per quanto riguarda i carichi agenti sulla trave questi possono essere **concentrati** o **ripartiti**. I carichi concentrati si rappresentano con un vettore, quelli ripartiti con un diagramma che rappresenta come varia il carico lungo la trave. Nella realtà è bene sapere che non esistono carichi puramente concentrati, in quanto si ha sempre una superficie di appoggio; se però questa è relativamente piccola si può considerare il carico concentrato.

La trave può avere l'asse rettilineo(es. trave) o curvo(es. arco) o di qualsiasi forma. Inoltre essa può essere orizzontale (es. trave), verticale (es. pilastro) o inclinata (es. rampa scala).

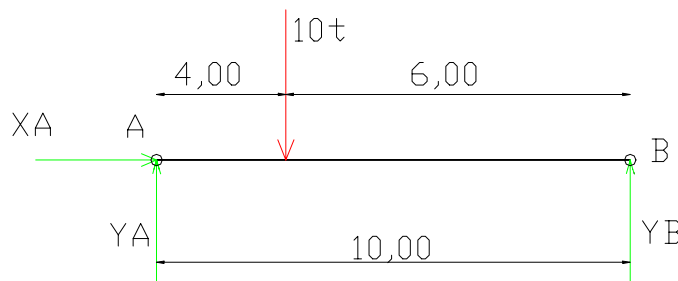
ESEMPI DI RISOLUZIONE DI TRAVI ISOSTATICHE

(I procedimenti che seguono hanno carattere generale si applicano cioè a tutte le travi isostatiche comunque vincolate e caricate)

Trave appoggiata con carico concentrato:



La prima cosa da fare è togliere i vincoli e mettere al loro posto le reazioni vincolari che essi fornivano. Queste le metto con il verso a caso, tanto se il relativo valore esce negativo vuol dire che il verso era sbagliato e va cambiato.



Quindi si stabilisce una convenzione per i segni delle forze e dei momenti:

Si scrivono adesso le 3 equazioni cardinali della statica:

$$\sum \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$1. \sum X = X_A = 0$$

$$\sum \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

$$2. \sum Y = Y_A + Y_B - 10 = 0$$

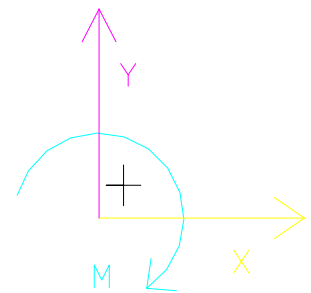
$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

(I momenti li posso fare rispetto ad un punto a piacere, pertanto scelgo quello che più mi fa comodo)

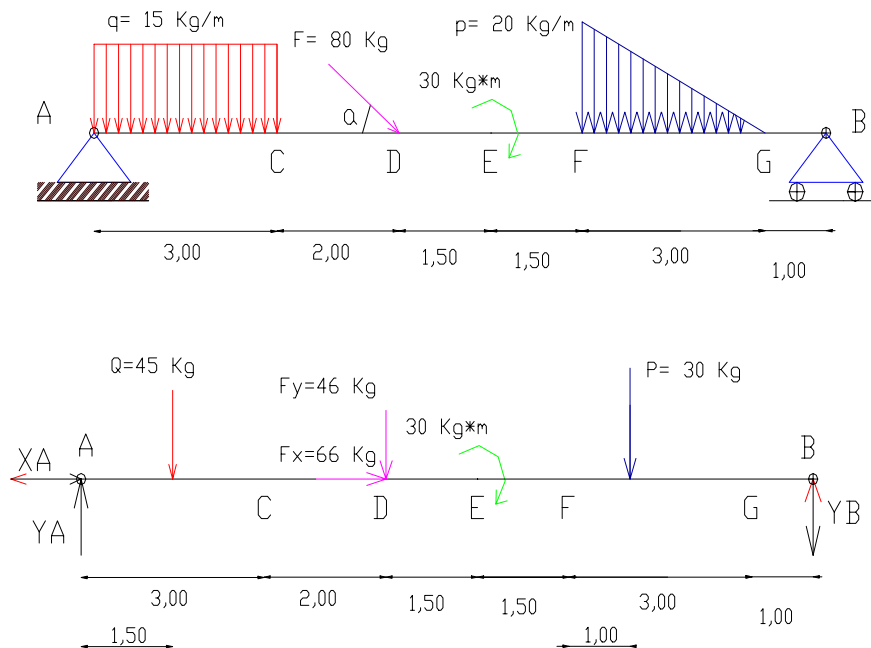
$$3. \sum M_A = -Y_B * 10 + 10 * 4,00 \quad \text{da questa equazione ricavo } Y_B = 10 * 4 / 10 = 4 \text{ t}$$

Sostituendo il valore di Y_B nella seconda equazione ricavo Y_A :

$$Y_A + Y_B - 10 = 0 ; Y_A + 4 - 10 = 0 \quad \text{da cui ricavo } Y_A = 6 \text{ t}$$



Trave appoggiata con carichi concentrati e ripartiti:



Prima si tolgono i vincoli e si mettono le reazioni vincolari. Quando ci sono carichi ripartiti, questi possono essere sostituiti (solo per ricercare le reazioni vincolari) con la loro risultante. Essa è uguale all'area del diagramma che rappresenta il carico ripartito ed è posizionata nel suo baricentro. Nel caso del carico costante (rettangolare) la risultante vale $Q = q * AC = 15 \text{ Kg/m} * 3 \text{ m} = 45 \text{ Kg}$ ed è posizionata ad $AC/2$ cioè a 1,5 m da A.

Nel caso del carico variabile (triangolare) la risultante vale $P = p * FG/2 = 20 \text{ Kg/m} * 3 \text{ m}/2 = 30 \text{ Kg}$ ed è posizionata ad $1/3$ di FG (altezza del triangolo).

Quando ci sono forze inclinate, queste, si possono decomporre nelle due componenti orizzontale e verticale $F_x = F * \cos \alpha = 80 * \cos 35^\circ = 66 \text{ Kg}$; $F_y = F * \sin \alpha = 80 * \sin 35^\circ = 46 \text{ Kg}$; quindi si procede come nell'esercizio precedente:

$$\sum X = X_A + 66 = 0 \text{ da cui si ricava } X_A = -66 \text{ Kg (il segno era sbagliato e va corretto)}$$

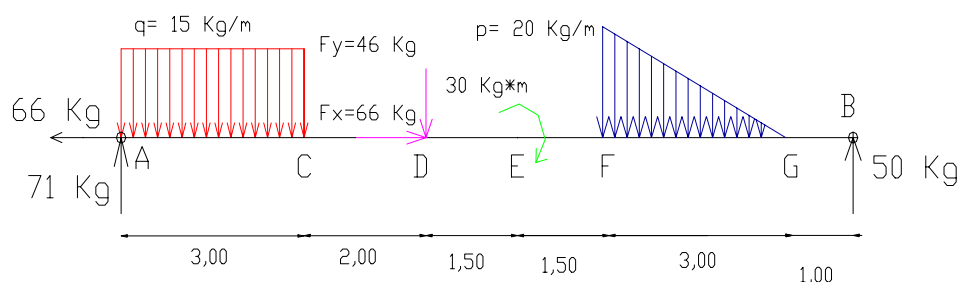
$$\sum Y = Y_A - 45 - 46 - 30 - Y_B = 0$$

$$\sum M_A = X_A * 0 + Y_A * 0 + 45 * 1,5 + 46 * 5,00 + 30 + 30 * 9,00 + Y_B * 12 = 0 \text{ da cui si ricava}$$

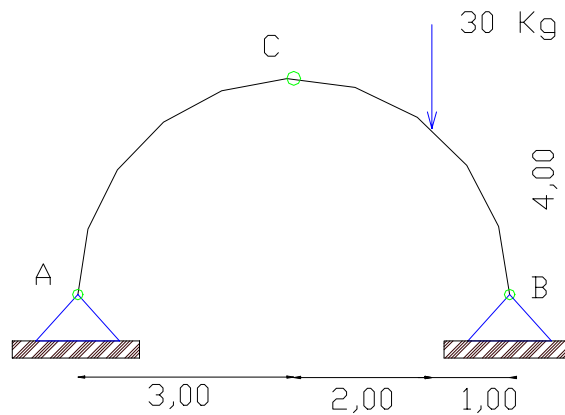
$$\sum M_A = 67,5 + 230 + 30 + 270 + 12 Y_B = 0 ; \quad 597,5 + 12 Y_B = 0 ; \quad Y_B = -597,5/12 = -50 \text{ Kg (il verso di } Y_B \text{ era sbagliato e va corretto)}$$

$$\text{Sostituendo il valore di } Y_B \text{ nella } \sum Y = 0 \text{ avremo : } \sum Y = Y_A - 45 - 46 - 30 + 50 = 0 ; Y_A = 71 \text{ Kg}$$

Dopo avere calcolato le reazioni vincolari si ridisegna la trave con tutti i carichi:



Arco a tre cerniere



L'arco a tre cerniere è un tipo di struttura molto usata soprattutto per i ponti e le grandi coperture. Esso è ancorato al terreno mediante due cerniere fisse ed è spezzato in due da una cerniera interna. L'arco a tre cerniere se viene considerato un unico corpo è 1 volta iperstatico perché le reazioni vincolari sono 4 (due cerniere esterne), mentre per l'unico corpo possiamo scrivere solo le 3 equazioni cardinali della statica.

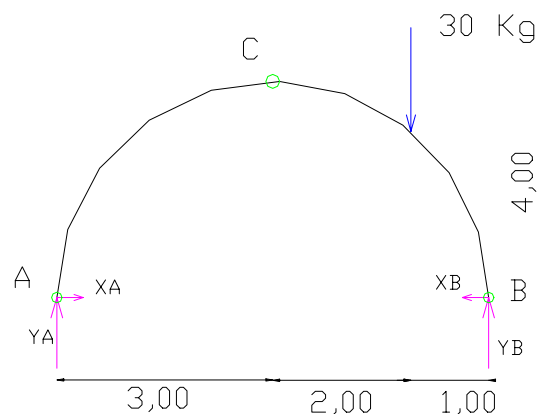
Se invece viene considerato spezzato in due parti allora è una struttura isostatica. Infatti ci sono 2 corpi per i quali si possono scrivere le equazioni della statica, cioè 6 equazioni. Le reazioni vincolari sono pure 6 (2 per ogni cerniera). Quando si spezza l'arco, le reazioni vincolari in C: X_C e Y_C nella cerniera C sono sempre le stesse sia se si considera il corpo AC sia se si considera il corpo BC perché sono reazioni mutue interne.

Questa struttura si può risolvere in tre modi diversi ottenendo ovviamente sempre lo stesso risultato delle reazioni vincolari:

- 1) Considerandolo come un unico corpo (struttura iperstatica)
- 2) Dividendolo in due corpi (struttura isostatica)
- 3) Graficamente (struttura isostatica)

1)

Metodo dell'equazione ausiliaria



Dopo avere tolto i vincoli esterni e messe le reazioni vincolari si scrivono le equazioni cardinali della statica per l'intero arco:

$$\sum X = X_A - X_B = 0 ; X_A = X_B$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B - 30 = 0$$

$$\sum M_A = X_A * 0 + Y_A * 0 + 30 * 5 + X_B * 0 - Y_B * 6 = 0 ; Y_B = 25 \text{ Kg}$$

$$Y_A = 30 - 25 = 5 \text{ Kg}$$

Per potere calcolare X_A e X_B occorre aggiungere un'altra equazione. Si fa allora la $\sum M_c = 0$ considerando solo mezzo arco :

$$\sum M_c = 30 * 2 + X_B * 4 - Y_B * 3 = 0 \quad \text{questa è l'equazione ausiliaria}$$

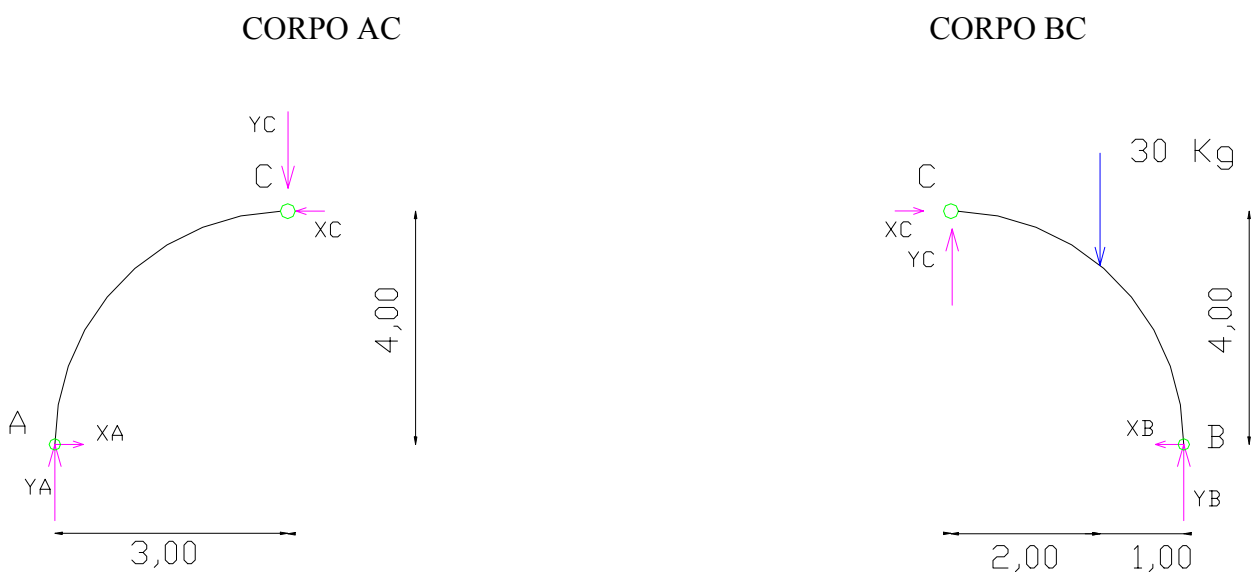
$$60 + 4 X_B - 3 * 25 = 0 ; X_B = 3,75 \text{ Kg}$$

$$X_A = X_B = 3,75 \text{ Kg}$$

2)

Metodo dei due corpi

Si spezza l'arco in due parti mettendo le reazioni vincolari in C con un certo verso per il corpo AC e col verso opposto per il corpo BC; quindi si applicano le tre equazioni della statica prima ad un corpo e poi all'altro, quindi si fa sistema fra le equazioni ottenute ricavando tutte le reazioni vincolari:



CORPO AC :

$$\sum X = X_A - X_C = 0; \quad X_A = X_C$$

$$\sum Y = Y_A - Y_C = 0; \quad Y_A = Y_C$$

$$\sum M_A = X_A * 0 + Y_A * 0 - X_C * 4 + Y_C * 3 = 0; \quad 3 Y_C = 4 X_C$$

CORPO CB :

$$\sum X = X_C - X_B = 0; \quad X_C = X_B$$

$$\sum Y = Y_C - 30 + Y_B = 0; \quad Y_B = 30 - Y_C$$

$$\sum M_B = X_C * 4 + Y_C * 3 - 30 * 1 + X_B * 0 + Y_B * 0 = 0; \quad 4 X_C + 3 Y_C - 30 = 0$$

Si fa sistema fra le equazioni risultanti :

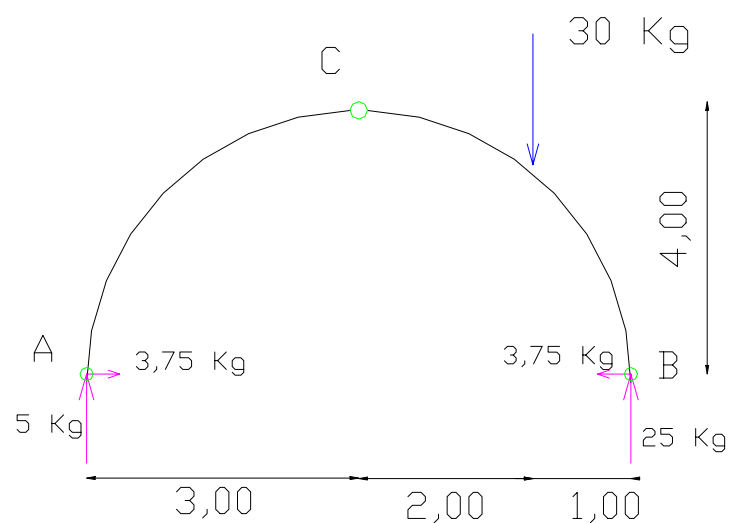
$$3 Y_C = 4 X_C$$

$$4 X_C + 3 Y_C - 30 = 0$$

$$X_C = 3,75 \text{ Kg}; \quad Y_C = 5 \text{ Kg}$$

$$X_A = 3,75 \text{ Kg}; \quad Y_A = 5 \text{ Kg}$$

$$X_B = 3,75 \text{ Kg}; \quad Y_B = 25 \text{ Kg}$$

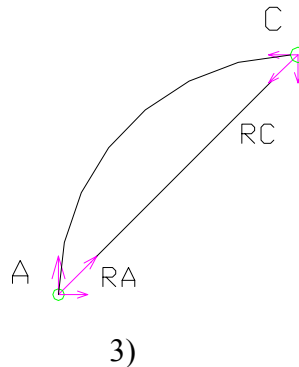


OSSERVAZIONE:

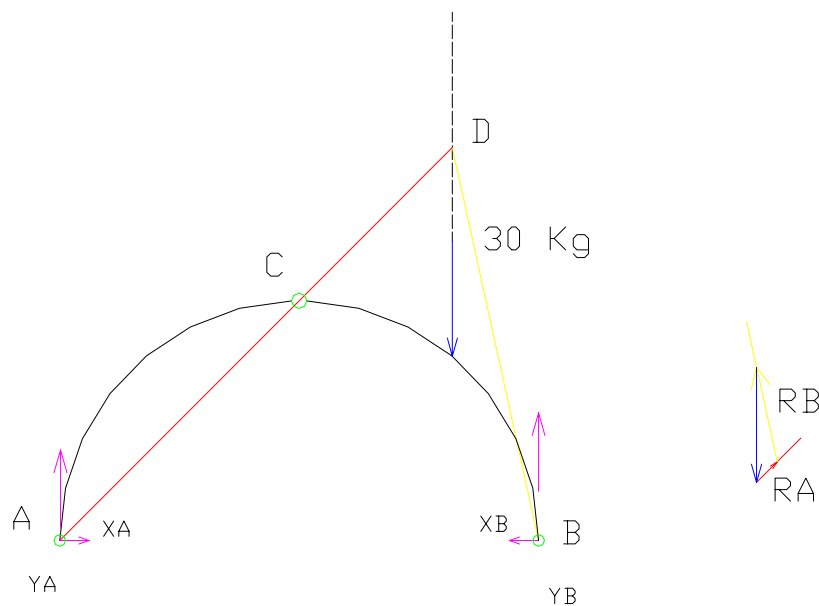
Se guardiamo attentamente le reazioni vincolari del corpo AC, ci possiamo rendere conto, facendo una costruzione grafica che la reazione R_A (risultante di X_A e Y_A) e la reazione R_B (risultante di X_B e Y_B) hanno la stessa direzione cioè la direzione della linea che congiunge le due cerniere estreme in A ed in C. Inoltre il corpo AC è scarico cioè non ha forze esterne applicate.

Orbene questo risultato ha carattere generale: ogni volta che abbiamo un corpo scarico con due cerniere alle estremità, le reazioni vincolari nelle due cerniere avranno la stessa direzione della congiungente le due cerniere.

Questa osservazione ci tornerà utile nella risoluzione grafica.



Risoluzione grafica



La reazione R_A per l'osservazione prima fatta deve avere la direzione della retta AC, questa incontra la direzione della forza esterna nel punto D, allora siccome perché tre forze si facciano equilibrio è necessario che passino tutte e tre per lo stesso punto, anche la reazione R_B deve passare per il punto D per cui conosciamo anche la sua direzione. Si tratta pertanto di decomporre la forza nota esterna nelle due componenti aventi direzione AD e BD.

A sua volta le reazioni R_A ed R_B possono essere scomposte nelle componenti orizzontali X_A , X_B e verticali Y_A e Y_B .

DISPENSA N° 4

LE TRAVI RETICOLARI

Le travi reticolari sono delle travi formate dall'unione di più aste, collegate fra di loro alle estremità. Esse sono praticamente vuote a differenza delle travi a parete piena e quindi molto più leggere, anche se sono più alte (se aumenta l'altezza, aumenta la resistenza della trave poiché aumenta il suo momento d'inerzia) per questo possono essere impiegate per luci molto grandi o per sopportare forti carichi. In genere si realizzano in acciaio, ma possono essere costruite anche in legno o in c.a.

1. Una prima ipotesi che deve essere verificata è che le aste devono formare dei **triangoli** non intrecciati.
2. La seconda ipotesi è che i nodi (cioè i punti in cui si incontrano le aste) devono essere delle **cerniere**. Questa ipotesi è senz'altro approssimata poiché le aste vengono collegate a secondo il materiale di cui sono fatte, se per esempio sono d'acciaio vengono saldate o imbullonate fra di loro mediante delle piastre metalliche (fazzoletti).
3. La terza ipotesi è che i **carichi esterni** siano applicati solo **sui nodi**. Anche questa ipotesi è approssimata in quanto non sempre è possibile concentrare il carico sul nodo, ma questo andrà anche sull'asta.

Se sono verificate le tre ipotesi dette allora possiamo ammettere che ogni asta della trave reticolare sarà sollecitata solo a sforzo normale (cioè **solo a trazione o solo a compressione**). Il che comporta un calcolo notevolmente più semplice.

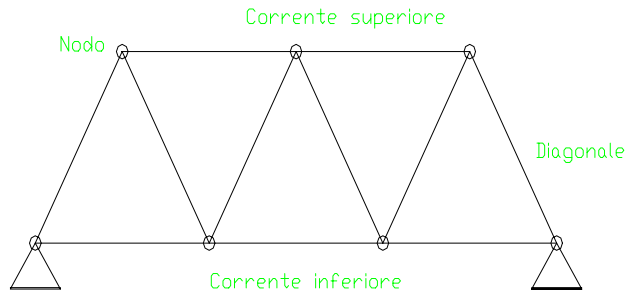
Se consideriamo una trave reticolare appoggiata ai due estremi con carico esterno verticale dall'alto verso il basso, è evidente che la parte di sotto sarà sollecitata a trazione e quella di sopra a compressione. Il corrente inferiore è sollecitato a trazione ed il corrente superiore a compressione. Le aste inclinate (diagonali) o quelle verticali (montanti), invece assorbono il taglio e potranno essere tese o compresse. Mentre per il calcolo delle aste tese basterà applicare la formula di verifica $\sigma = P/A \leq \sigma_{amm}$; per quelle compresse bisognerà prima controllare il **carico di punta** in quanto le aste in genere sono lunghe rispetto alla loro sezione trasversale.

L'approssimazione della seconda e terza ipotesi ha come conseguenza che le aste risultano in realtà anche inflesse. Anche se in teoria i nodi fossero veramente cerniere e se i carichi fossero applicati sui nodi, l'asta si infletterebbe per il peso proprio. Comunque si può valutare a parte il momento flettente dovuto al peso proprio e calcolare l'asta a presso-flessione invece che a semplice sforzo normale (questo si fa quando il peso proprio dell'asta è rilevante come nel caso di travi da ponte). Negli altri casi di travi di modesta entità (come le travi di copertura) è sufficiente in prima approssimazione aumentare la sezione delle aste per tenere conto degli effetti flessionali. Oppure distribuire i carico che grava sull'asta, fra i due nodi della stessa. Comunque è bene sempre effettuare le verifiche quando non si è certi del vero comportamento o quando non si ha ancora molta esperienza.

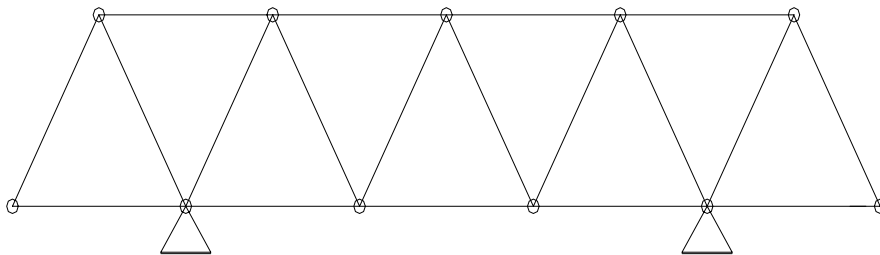
Le travi reticolari sono sempre isostatiche (per vincoli interni) per cui possono essere risolte sia con metodi grafici che analitici.

Le travi possono essere vincolate al terreno o ad altre strutture mediante i vincoli per cui si possono ottenere travi appoggiate, o a sbalzo.

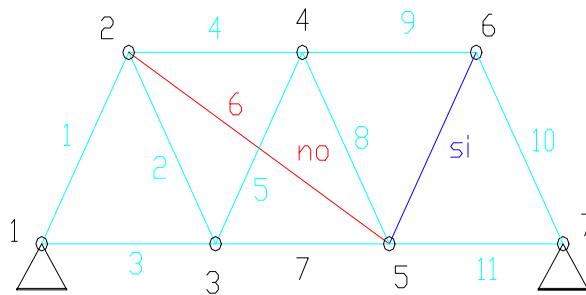
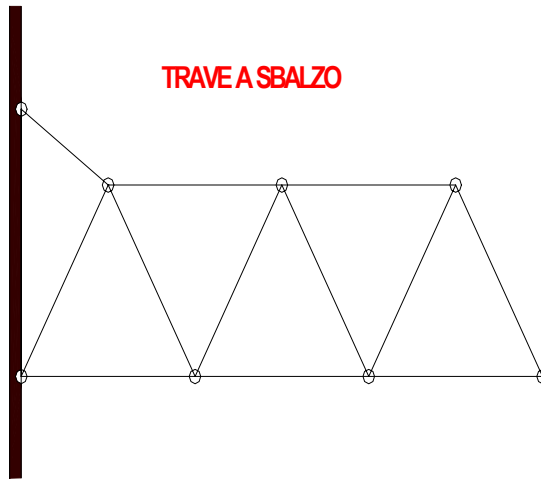
TRAVE APPOGGIATA



TRAVE APPOGGIATA CON SBALZI

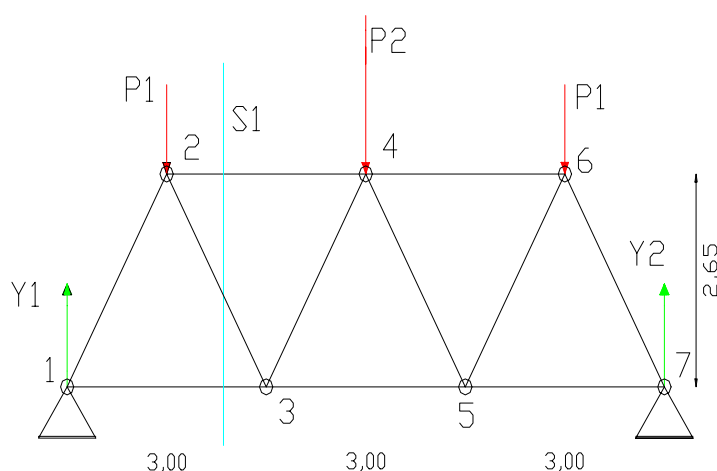


TRAVE A SBALZO



Se n è il numero dei nodi, il numero delle aste deve essere $2n-3$; in questo caso è $2 \times 7 - 3 = 11$; però è sbagliata la disposizione di un'asta.

ESEMPIO DI CALCOLO COL METODO DELLE SEZIONI DI RITTER



Dopo avere calcolato le reazioni vincolari come se si trattasse di una normale trave appoggiata, si esegue una **sezione di Ritter**, cioè si taglia la trave in due parti. Si devono tagliare tre aste non concorrenti nello stesso nodo e si applicano alle aste tagliate gli sforzi che trasmetteva la restante parte della trave. Gli sforzi si rappresentano con dei vettori paralleli all'asta tagliata, per quanto riguarda il verso, se si pensa che l'asta sia un puntone (cioè compresso) la punta della freccia deve andare verso il nodo, se si pensa che l'asta sia un tirante (cioè sollecitato a trazione) la punta della freccia si deve allontanare dal nodo. Comunque il verso può essere messo a caso, tanto se dal calcolo lo sforzo risulta negativo vuol dire che il verso era sbagliato e va cambiato.

Il procedimento che segue può essere applicato a (quasi) tutte le aste della trave seguendo lo stesso procedimento.

CALCOLO DELLO SFORZO NELL'ASTA 2-4

Bisogna applicare l'equazione della statica $\sum \mathbf{M} = 0$ scegliendo come polo il **nodo 3** cioè il punto in cui si incontrano le altre due aste.

$$\sum \mathbf{M}_3 = S_{24} * 2,65 + S_{23} * 0 + S_{13} * 0 - P_1 * 1,5 + Y_1 * 3,00 = 0$$

da cui si ricava :

$$S_{24} = P_1 * 1,5 - Y_1 * 3,00 / 2,65$$

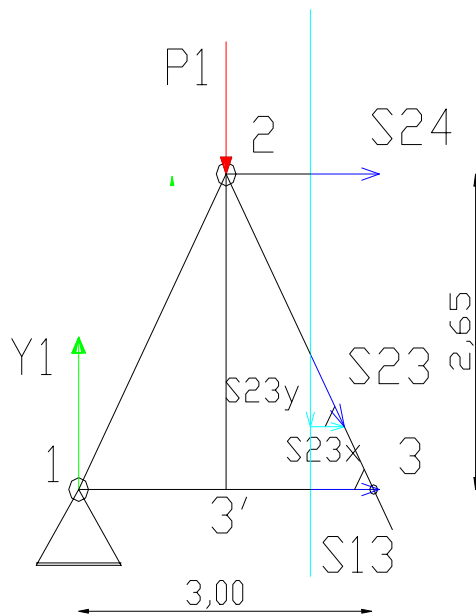
(passando ai numeri, il valore di S_{24} uscirà negativo, per cui bisognerà correggere il verso)

CALCOLO DELLO SFORZO NELL'ASTA 1-3

Bisogna applicare l'equazione della statica $\sum \mathbf{M} = 0$ scegliendo come polo il **nodo 2** cioè il punto in cui si incontrano le altre due aste.

$$\sum \mathbf{M}_2 = -S_{13} * 2,65 + S_{23} * 0 + S_{24} * 0 + P_1 * 0 + Y_1 * 1,5 = 0$$

$$\text{da cui si ricava : } S_{13} = Y_1 * 1,5 / 2,65$$



CALCOLO DELLO SFORZO NELL'ASTA 2-3

Quando però si tratta di calcolare lo sforzo nell'asta 2-3 il metodo di Ritter cade in difetto.

Infatti l'asta 2-4 e la 1-3 sono parallele per cui il loro punto di incontro è all'infinito; non si può pertanto fare la $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ scegliendo come polo il punto in cui si incontrano le altre due aste. In questi casi conviene adottare allora un'altra procedura:

Si applica l'altra equazione della statica $\sum \mathbf{Y} = \mathbf{0}$, dopo avere scomposto lo sforzo S_{23} nelle sue due componenti, S_x ed S_y .

Per calcolare l'angolo α nel nodo 3 si applica un teorema sui triangoli rettangoli al triangolo 2-3-3'

- In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto da calcolare.

Nel triangolo rettangolo (2-3-3'), si calcola il cateto $2-3' = 3'-3 * \text{tg } \alpha$;

da cui si ricava $\text{tg } \alpha = 2-3' / 3'-3$ e quindi $\alpha = \text{Arc tg } (2-3' / 3'-3)$

Per calcolare la componente S_y di S_{23} si può applicare un altro teorema sui triangoli rettangoli:

- In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto da calcolare.

$$S_y = S_{23} * \text{sen } \alpha$$

Si applica adesso l'equazione della statica $\sum \mathbf{Y} = \mathbf{0}$

$\sum \mathbf{Y} = -P_1 + Y_1 - S_y = 0$ e sostituendo : $\sum \mathbf{Y} = -P_1 + Y_1 - S_{23} * \text{sen } \alpha = 0$ da cui si ricava

$$S_{23} = + P_1 - Y_1 / \text{sen } \alpha$$

Si considera adesso una trave reticolare molto usata per la costruzione dei tetti, la capriata alla **Palladio**. In questo tipo di struttura non c'è nessun problema per l'individuazione del polo attorno a cui fare i momenti, però presenta una elaborazione abbastanza lunga per la determinazione dei bracci degli sforzi dovendo ricorrere a successive costruzioni di triangoli ed all'applicazione dei relativi teoremi. Molto più semplicemente, questa struttura come pure ogni altra, si può risolvere con un metodo grafico per esempio con il **metodo dell'equilibrio dei nodi**.

Comunque c'è da dire che il metodo analitico è sempre il più preciso, perché il metodo grafico è legato alla precisione del disegno; inoltre un eventuale errore in un nodo si riporta di seguito nel prossimo e così via. (se però si eseguono i disegni con un programma CAD si annullano gli errori di graficismo).-

Il metodo si basa sul principio che ogni nodo della struttura, se considerato come un'entità a se stante, sotto l'effetto degli sforzi trasmessigli dalle aste che ivi concorrono deve essere in equilibrio.

ESEMPIO DI CALCOLO DEGLI SFORZI CON IL METODO DEI NODI

Conviene numerare i nodi partendo dal nodo 1 (in cui concorrono due sole aste). Il nodo 2 sarà quello in cui dopo avere calcolato gli sforzi nelle aste del nodo 1, avrà incogniti solo gli sforzi di due aste e così via.

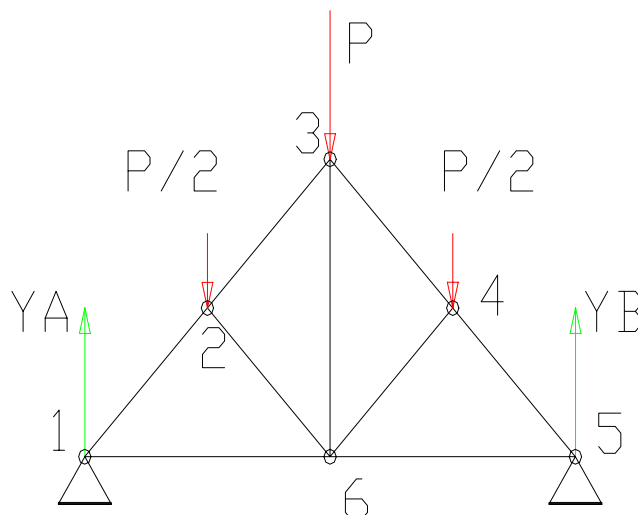
Dopo avere calcolato le reazioni vincolari esterne; si parte dal nodo in cui concorrono due sole aste, nel nostro caso il nodo

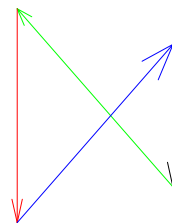
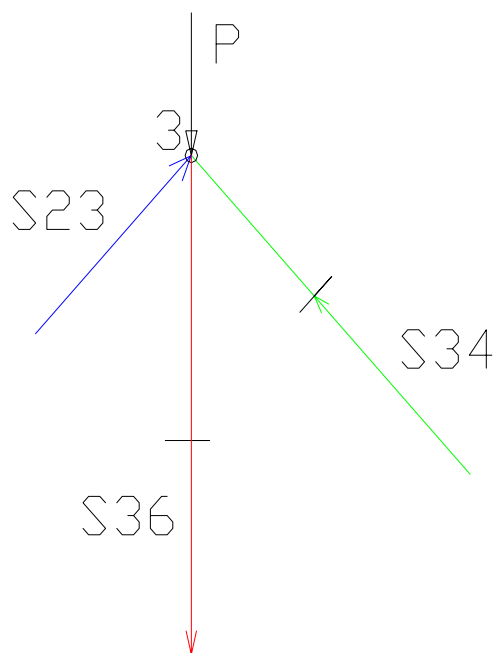
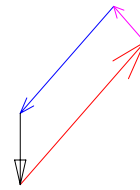
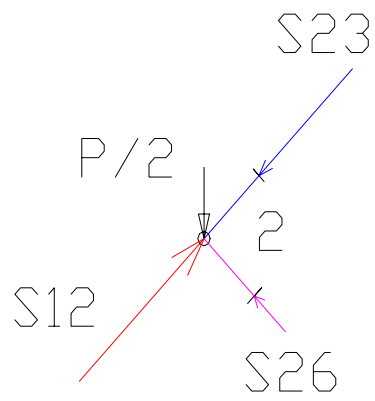
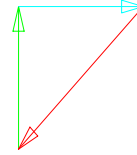
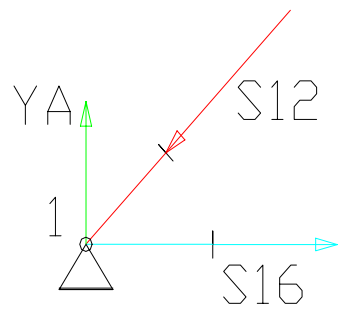
1. Si taglia la struttura, isolando il nodo con i pezzi di aste che vi concorrono. Si tratta allora di scomporre una forza (per il nodo 1 è la reazione vincolare) in due componenti di cui si conoscono le direzioni (delle aste tagliate). Si ottengono così due forze che rappresentano gli sforzi nelle due aste tagliate (S_{12} che va verso il nodo quindi comprime l'asta; ed S_{16} che si allontana dal nodo quindi la tende). L'asta 12 è un puntone; l'asta 16 è un tirante.

Quando si passa al nodo 2 si ha un nodo in cui concorrono tre aste (l'asta 12; l'asta 26; e l'asta 23), ma dell'asta 12 ormai si conosce lo sforzo calcolato nel nodo 1, allora si dispone lo sforzo S_{12} noto, ma col verso cambiato, sul nodo 2. Quindi nel nodo 2 solo di due aste non si conosce lo sforzo.

Si costruisce allora il poligono di equilibrio, cioè si dispongono le forze in modo che i versi si rincorrono e si ottengono gli sforzi nelle aste 26 e 23).

Si passa ora al nodo 3 in cui concorrono le aste 23; 36; e 34. Qui si conosce lo sforzo nell'asta 23, e ripetendo il poligono di equilibrio si ricavano gli sforzi nelle aste 36 e 34. Si procede così fino alla fine. In questo caso dato che la struttura ed i carichi sono simmetrici non è necessario lavorare sul nodo 4 in quanto gli sforzi saranno uguali a quelli del nodo 2. Per quanto riguarda il nodo 6 non è necessario nemmeno lavorarci perché sono già noti tutti gli sforzi.





DISPENSA N° 5

DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI

Consideriamo una struttura qualsiasi, per esempio una trave appoggiata, sollecitata da carichi generici. Dopo avere trovato le reazioni vincolari, il prossimo passo da fare è quello di disegnare i diagrammi delle sollecitazioni.

La trave per effetto dei carichi (carichi applicati e reazioni vincolari) subirà delle deformazioni e all'interno della trave nasceranno delle "tensioni"; se queste tensioni superano quelle che il materiale di cui essa è composta, allora la trave si rompe.

Quando applichiamo i carichi alla trave, succede che essa viene sollecitata cioè si vengono a creare delle sollecitazioni che deformano la trave. Le sollecitazioni che noi considereremo sono:

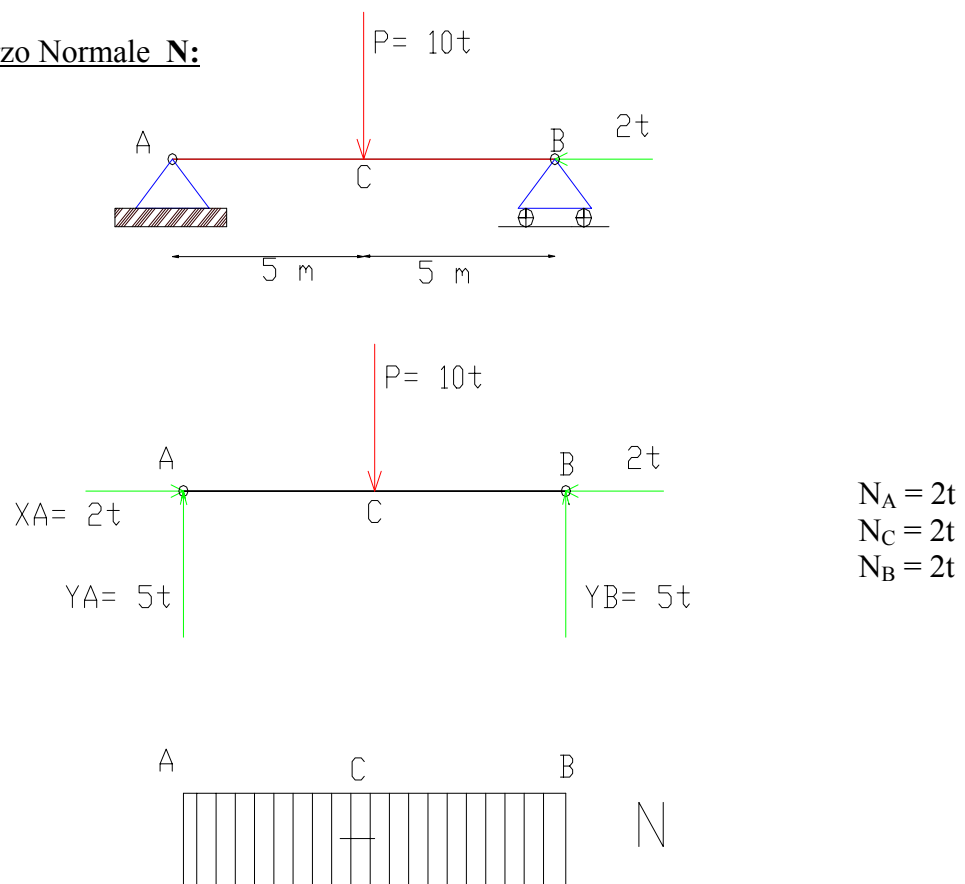
- **Sforzo normale** (dovuto alle forze parallele alla trave)
- **Taglio** (dovuto alle forze perpendicolari alla trave)
- **Flessione** (dovuta alle forze perpendicolari alla trave e/o ai momenti applicati)

Ci sarebbe un'altra sollecitazione : **la torsione** dovuta ai momenti che ruotano attorno all'asse della trave, ma questa è meno frequente.

Vediamo adesso come si disegnano i diagrammi delle sollecitazione nella trave di cui sopra. Il metodo è generico cioè la metodologia che andremo a vedere, vale per qualsiasi trave comunque caricata e comunque disposta o vincolata.

CARICHI CONCENTRATI

Diagramma dello Sforzo Normale N:

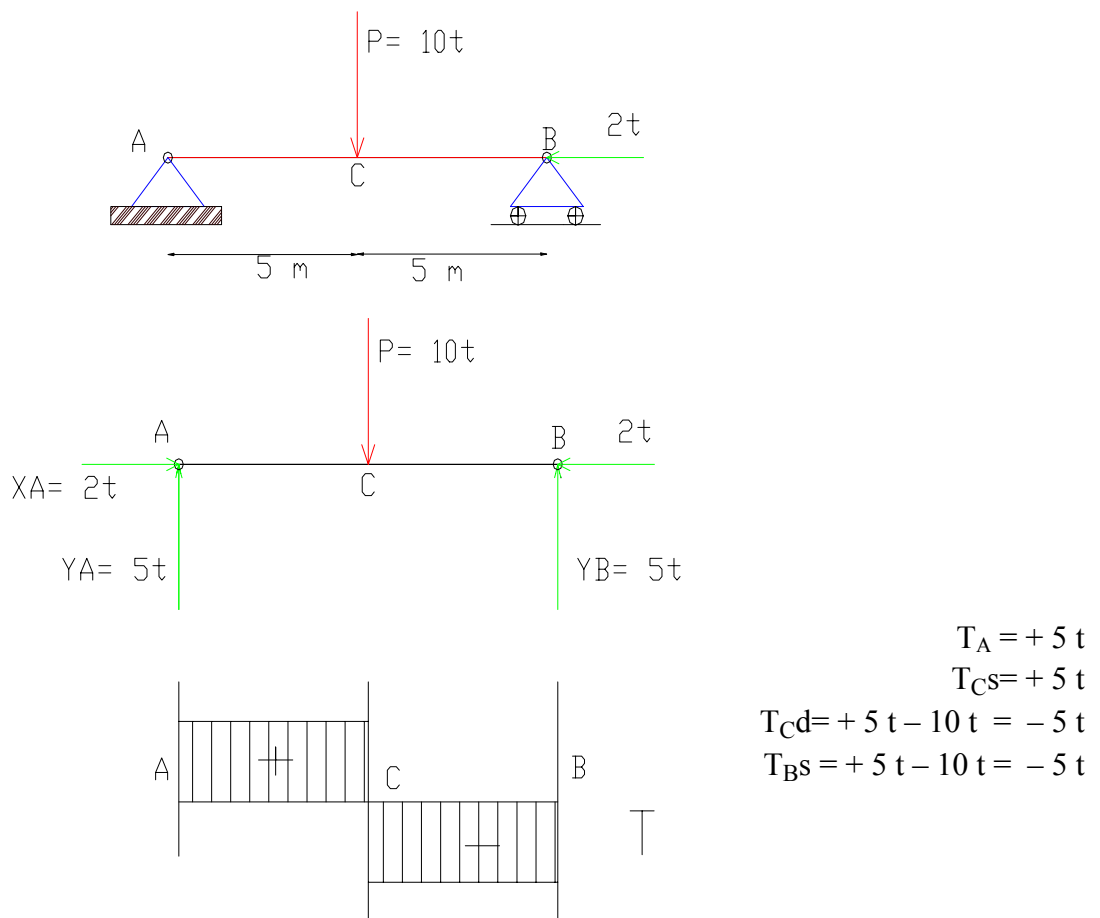


Si parte da un'estremità della trave per esempio dal punto A e si immagina di camminare sulla trave procedendo a ritroso, guardando sempre avanti. Si sommano algebricamente (cioè col segno meno se producono compressione e più se producono trazione) passo passo, tutte le forze parallele alla trave. In ogni punto della trave lo sforzo normale sarà uguale alla somma algebrica di tutte le forze incontrate sino a quel punto. **Attenzione a considerare soltanto le forze che stanno alla sinistra del punto in cui ci si trova.**

Si traccia una linea parallela alla trave (A-B) che si chiama fondamentale e si assume per convenzione il verso positivo sopra la fondamentale e negativo di sotto. Quindi in scala opportuna si riporta perpendicolarmente alla fondamentale in ogni punto il valore dello sforzo normale.

Questo diagramma, quando è completato, ci fa vedere come varia lo sforzo normale lungo l'asse della trave, cioè dove è maggiore, dove è minore dove è nullo e in quali parti è costante.

Diagramma del Taglio T :



-Quando il carico è concentrato il diagramma del taglio è rettangolare.

Si parte da un'estremità della trave per esempio dal punto A e si immagina di camminare sulla trave procedendo a ritroso, guardando sempre avanti. Si sommano algebricamente (cioè col segno meno se dirette verso il basso e più se dirette verso l'alto) passo passo, tutte le forze perpendicolari alla trave. In ogni punto della trave lo sforzo di taglio sarà uguale alla somma algebrica di tutte le forze incontrate sino a quel punto. **Attenzione a considerare soltanto le forze che stanno alla sinistra del punto in cui ci si trova.**

Si traccia una linea parallela alla trave (A-B) che si chiama fondamentale e si assume per convenzione il verso positivo sopra la fondamentale e negativo di sotto. Quindi in scala opportuna si riporta perpendicolarmente alla fondamentale in ogni punto il valore dello sforzo di taglio.

Questo diagramma, quando è completato, ci fa vedere come varia lo sforzo di taglio lungo l'asse della trave, cioè dove è maggiore, dove è minore dove è nullo e in quali parti è costante

Diagramma del Momento Flettente M :

Si parte da un'estremità della trave per esempio dal punto A e si immagina di camminare sulla trave procedendo a ritroso, guardando sempre avanti. Si sommano algebricamente (cioè col segno meno se antiorari e più se orari) passo passo, tutti i momenti che ci sono applicati sulla trave compresi quelli creati dalle forze perpendicolari alla stessa, fatti rispetto al punto che si sta considerando. In ogni punto della trave lo sforzo di flessione (momento flettente) sarà uguale alla somma algebrica di tutti i momenti sino a quel punto calcolati ed eventualmente presenti. **Attenzione a considerare soltanto le forze e i momenti che stanno alla sinistra del punto in cui ci si trova.**

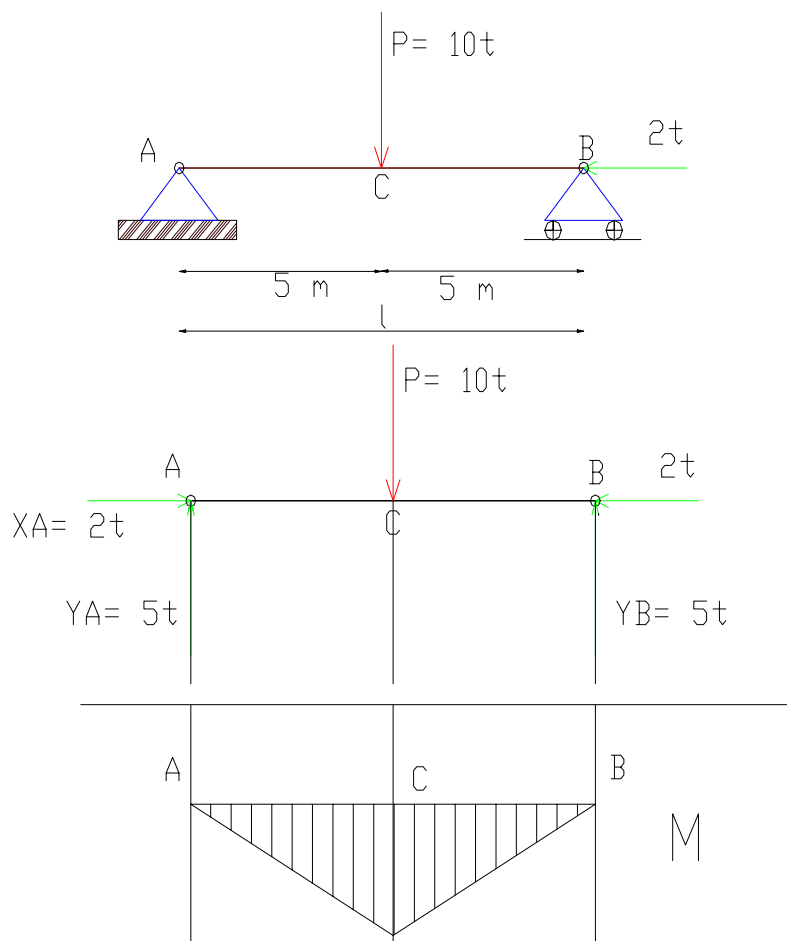
Si traccia una linea parallela alla trave (A-B) che si chiama fondamentale e si assume per convenzione il verso positivo sotto la fondamentale e negativo di sopra. Quindi in scala opportuna si riporta perpendicolarmente alla fondamentale in ogni punto il valore del momento flettente calcolato in quel punto.

Questo diagramma, quando è completato, ci fa vedere come varia lo sforzo di flessione lungo l'asse della trave, cioè dove è maggiore, dove è minore dove è nullo e in quali parti è costante.

Quando c'è una cerniera in quel punto il momento è zero.

$$M_A = 0 ; M_B = 0 ; M_C = Y_A * l/2 = P/2 * l/2 = P * l/4 = 25 \text{ tm}$$

Quando il carico è concentrato il diagramma del momento è triangolare.



CARICHI RIPARTITI

Consideriamo la semplice trave appoggiata con carico uniformemente ripartito su tutta la lunghezza

Diagramma del Taglio T :

-Quando il carico è uniformemente ripartito il diagramma del taglio è triangolare. Inoltre quando il carico è simmetrico il diagramma del taglio è emisimmetrico (cioè simmetrico e capovolto).-

$$T_A = Y_A = 500 \text{ Kg}; \quad T_{BS} = Y_A - q \cdot l = 500 \text{ Kg} - 100 \text{ Kg/m} \cdot 10 \text{ m} = -500 \text{ Kg}$$

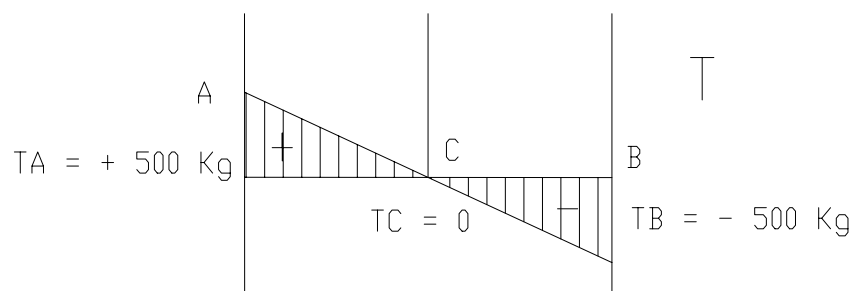
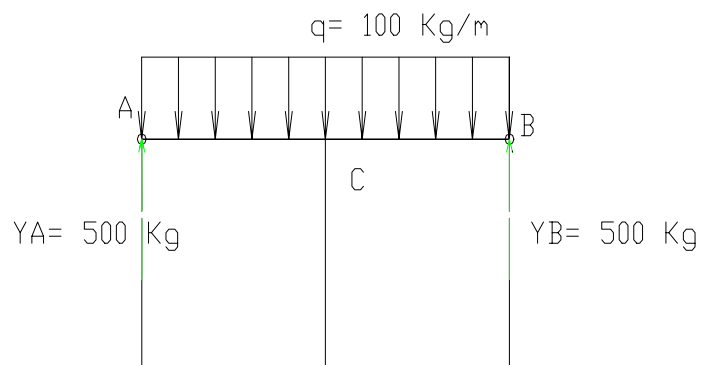
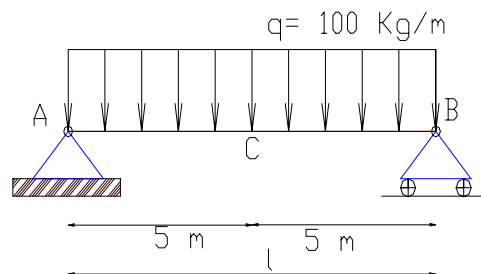
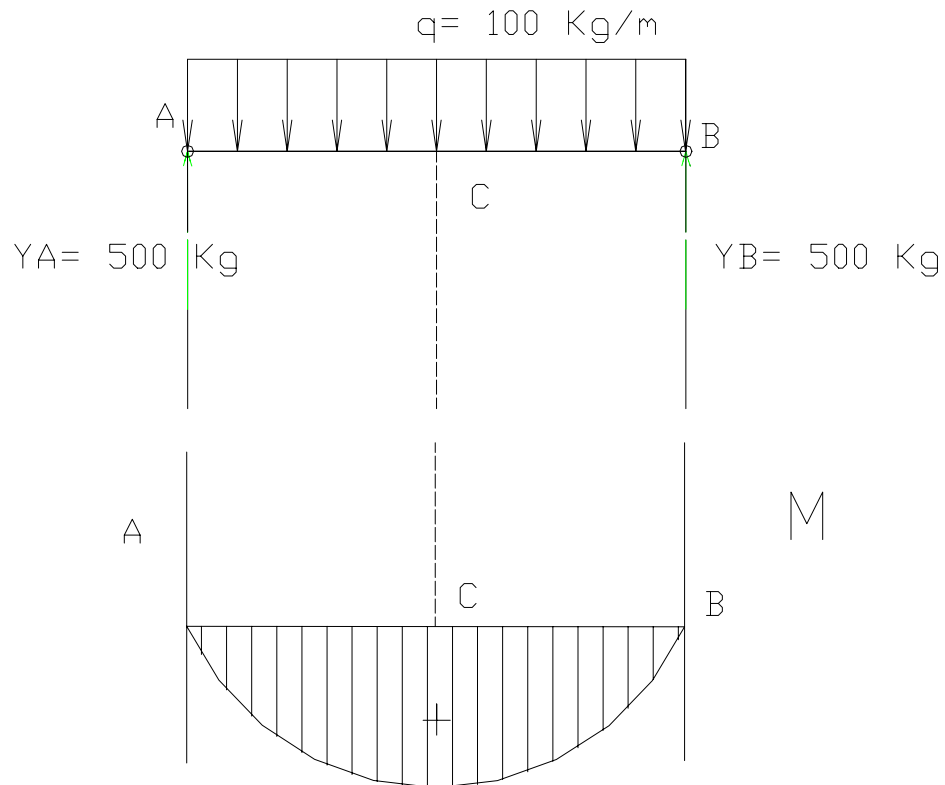
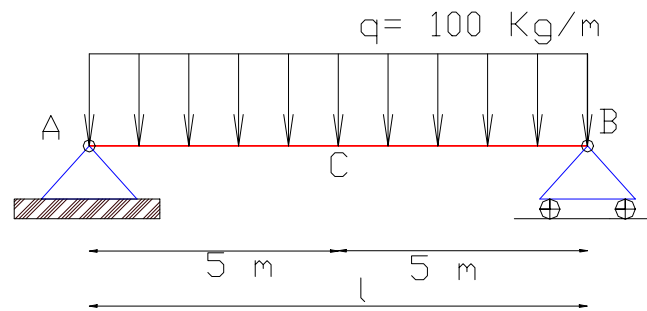


Diagramma del Momento M :

- Quando il carico è uniformemente ripartito il diagramma del momento è parabolico.
- Quando il carico è simmetrico il diagramma del momento è simmetrico.-
- Quando c'è una cerniera in quel punto il momento è zero.
- Dove il taglio è zero il momento è “massimo” (cioè fa la pancia).

$$M_A = 0; \quad M_B = 0; \quad M_C = Y_A * 1/2 - (q * 1/2) * 1/4 = (q * 1/2) * 1/2 - (q * 1/2) * 1/4 = q * l^2 / 8$$

$$M_C = 500 \text{ Kg} * 5 \text{ m} - (100 \text{ Kg/m} * 5 \text{ m} * 2,5 \text{ m}) = + 1250 \text{ Kgm}$$

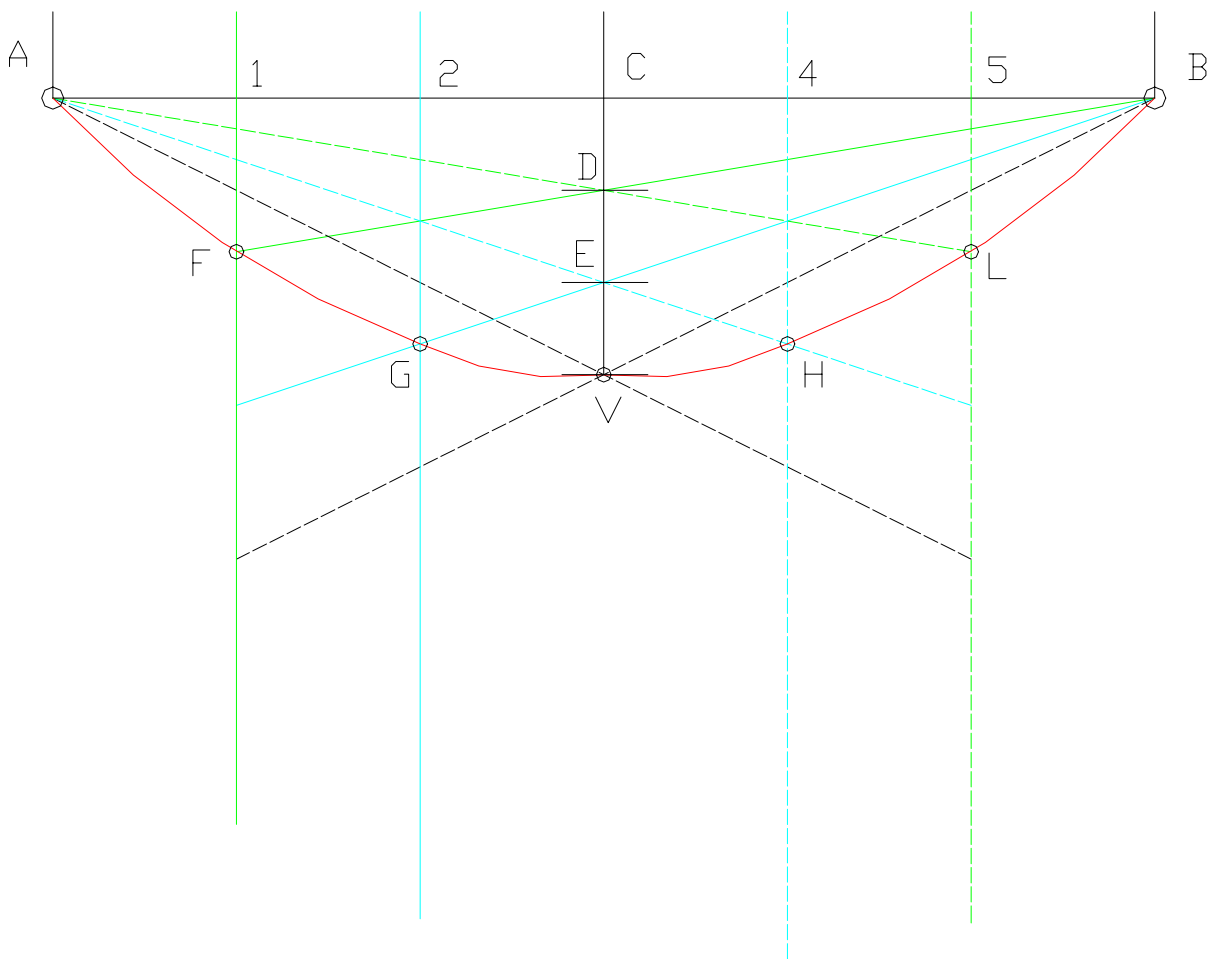


$$M_C = 1250 \text{ Kgm}$$

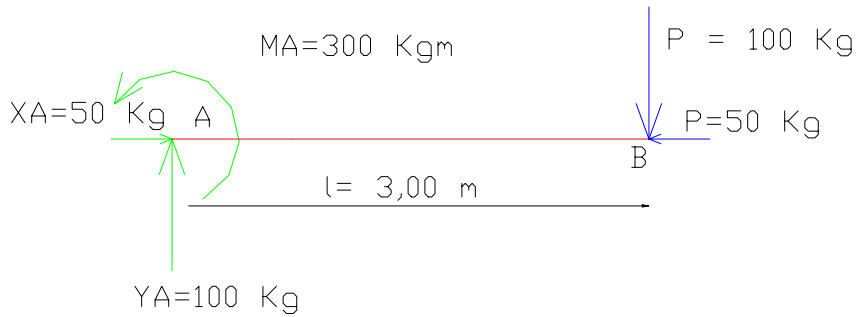
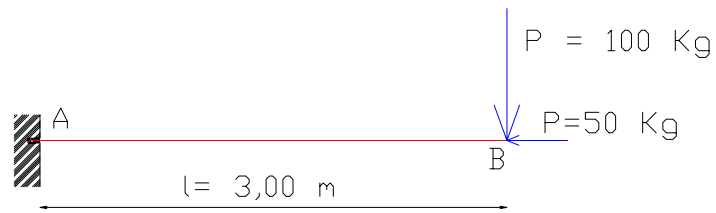
Nel caso della trave appoggiata con carico rettangolare, il momento avrà quindi andamento parabolico. Della parabola si conosce il vertice V ed i due punti per cui deve passare A e B .

La parabola si può disegnare con la costruzione geometrica seguente:

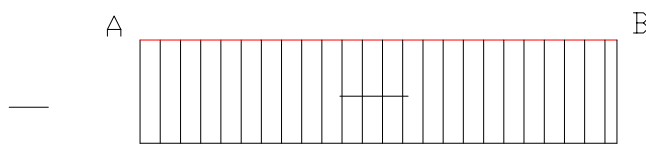
- Si divide il segmento AB in un numero qualunque di parti (per esempio in 6 parti, individuate dai punti $A, 1, 2, C, 4, 5, B$).
- Si traccia la perpendicolare ad AB per C e si riporta il valore di M_C fino al punto V .
- Si divide la perpendicolare CV nello stesso numero di parti della AC .
- Dai punti $1, 2, 4$ e 5 si mandano le parallele alla CV .
- Dai punti A e B si manda le congiungenti detti punti con i punti D, E, V .
- I punti in cui le verticali incontrano le congiungenti sono punti della parabola.



ESEMPIO :Mensola con carico concentrato all'estremità

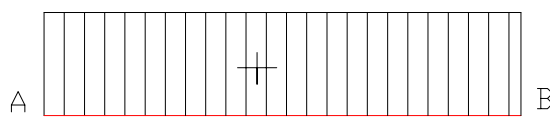


+



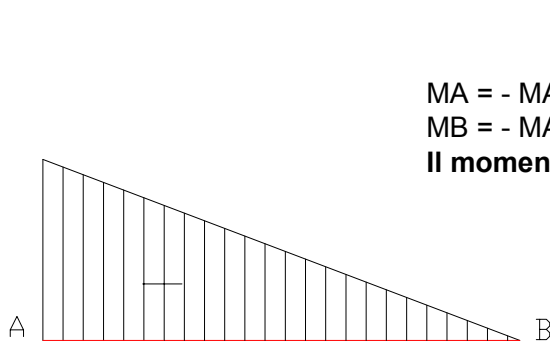
N
 $NA = - 50 \text{ Kg}$
 $NB = - 50 \text{ Kg}$

+



T
 $TAd = +YA = +100 \text{ Kg}$
 $TBs = +YA = + 100 \text{ Kg}$

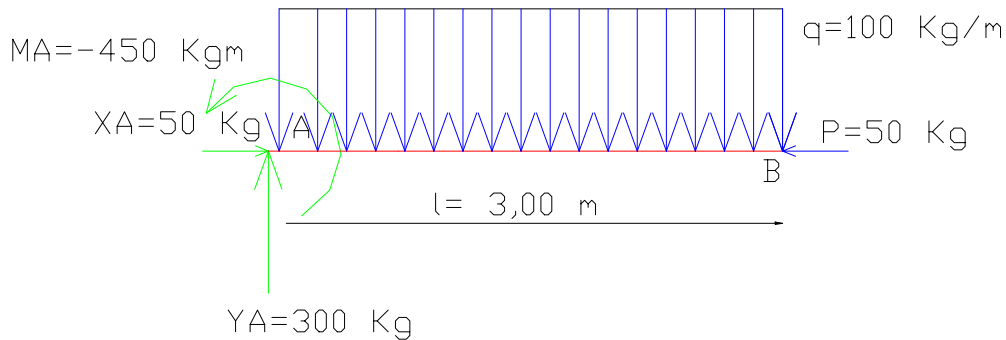
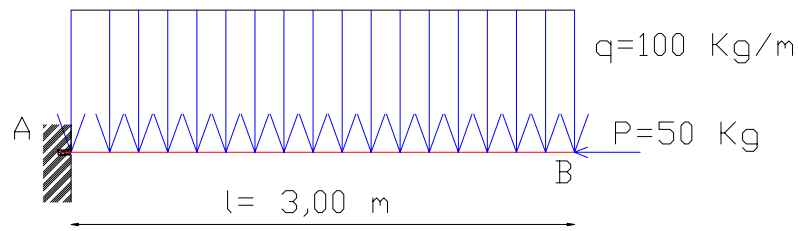
—



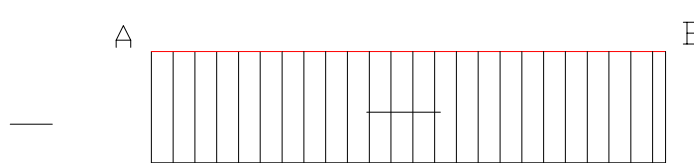
M
 $MA = - MA = - 300 \text{ Kgm}$
 $MB = - MA + YA * 3 = - 300 + 100 * 3 = 0$
Il momento all'estremità libera della mensola sempre zero.

+

ESEMPIO :Mensola con carico uniformemente ripartito



+

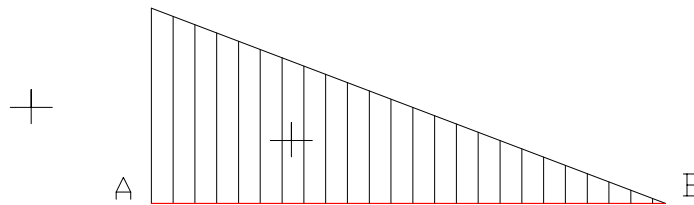


N

$$N_A = - 50 \text{ Kg}$$

$$N_B = - 50 \text{ Kg}$$

+



T

$$T_{Ad} = +Y_A = +300 \text{ Kg}$$

$$T_{Bs} = + Y_A - q * l = +300 - 100 * 3 = 0$$

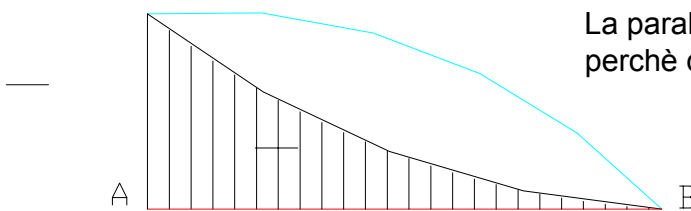
—

M

$$M_A = - 450 \text{ Kgm}$$

$$M_B = - M_A + Y_A * l - q * l * \frac{l}{2} = - 450 + 300 * 3 - 100 * 3 * \frac{3}{2} = 0$$

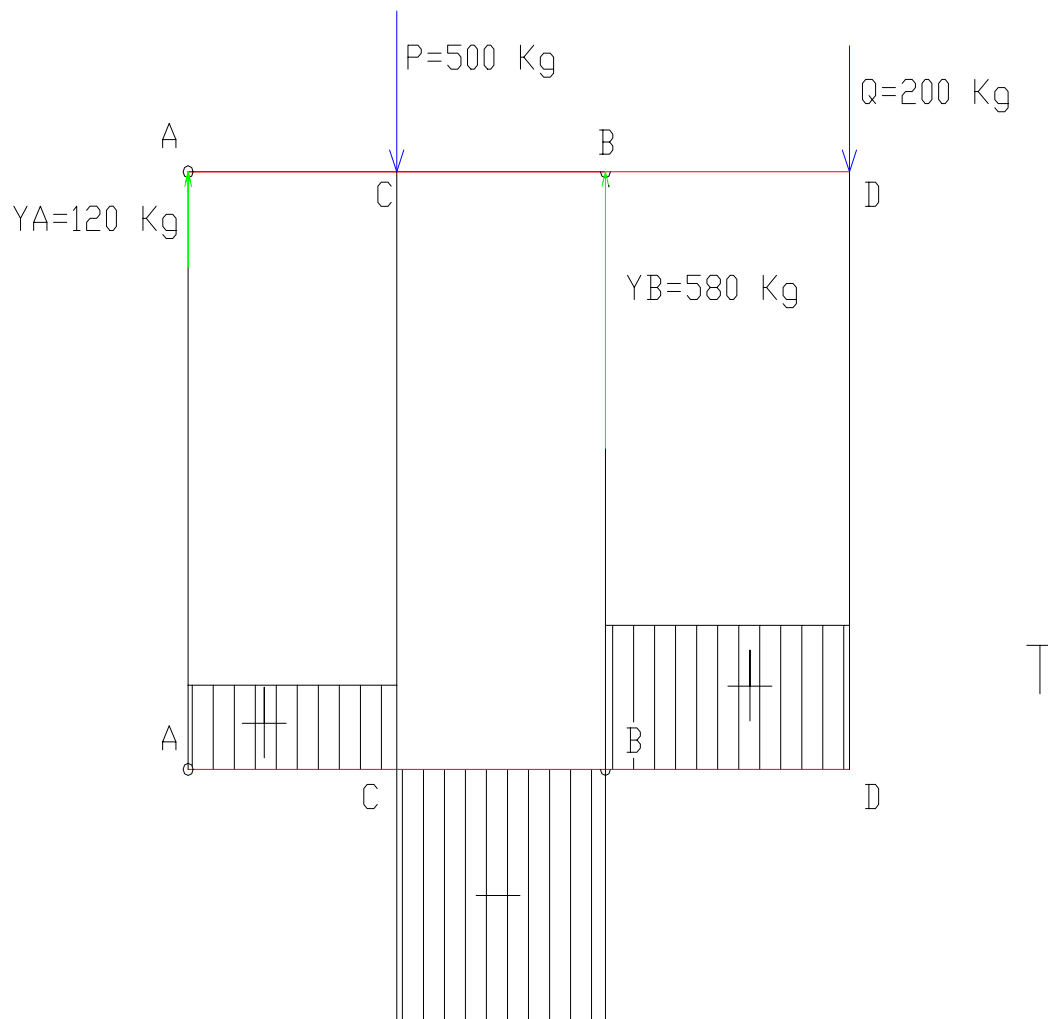
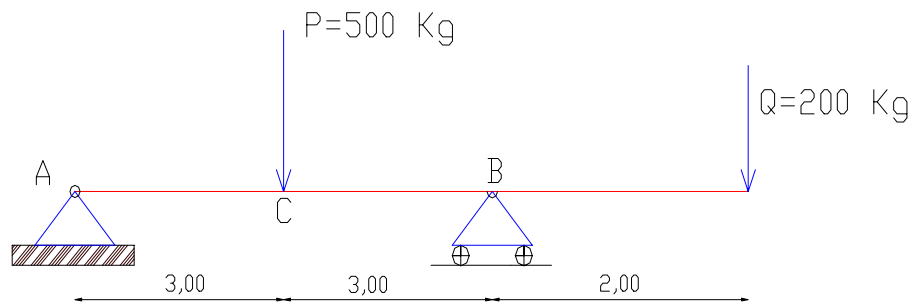
Il momento all'estremità libera della mensola è sempre zero



La parabola non può essere quella tratteggiata perchè dove il taglio è zero il momento fa la pancia.

+

ESEMPIO :Trave con sbalzo e con carichi concentrati



$$T_A = + 120 \text{ Kg}$$

$$T_{Cs} = +120 \text{ Kg}$$

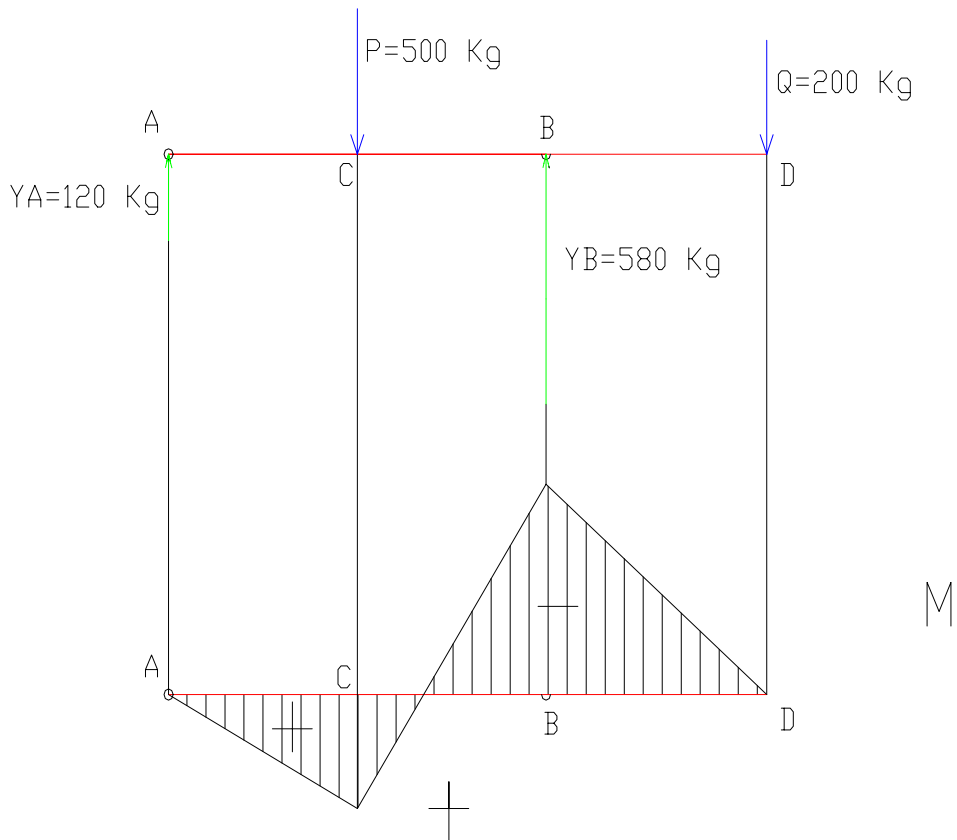
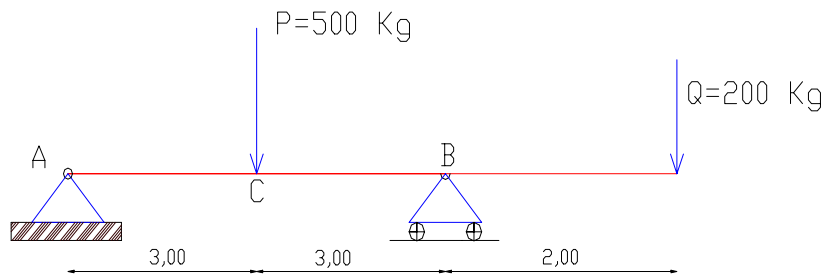
$$T_{Cd} = +120 \text{ Kg} - 500 \text{ Kg} = - 380 \text{ Kg}$$

$$T_{Bs} = +120 \text{ Kg} - 500 \text{ Kg} = -380 \text{ Kg}$$

$$T_{Bd} = +120 \text{ Kg} - 500 \text{ Kg} + 580 \text{ Kg} = + 200 \text{ Kg}$$

$$T_{Ds} = +120 \text{ Kg} - 500 \text{ Kg} + 580 \text{ Kg} = + 200 \text{ Kg}$$

ESEMPIO :Trave con sbalzo e con carichi concentrati



$M_A = 0$ (Dove c'è una cerniera il momento è sempre zero)

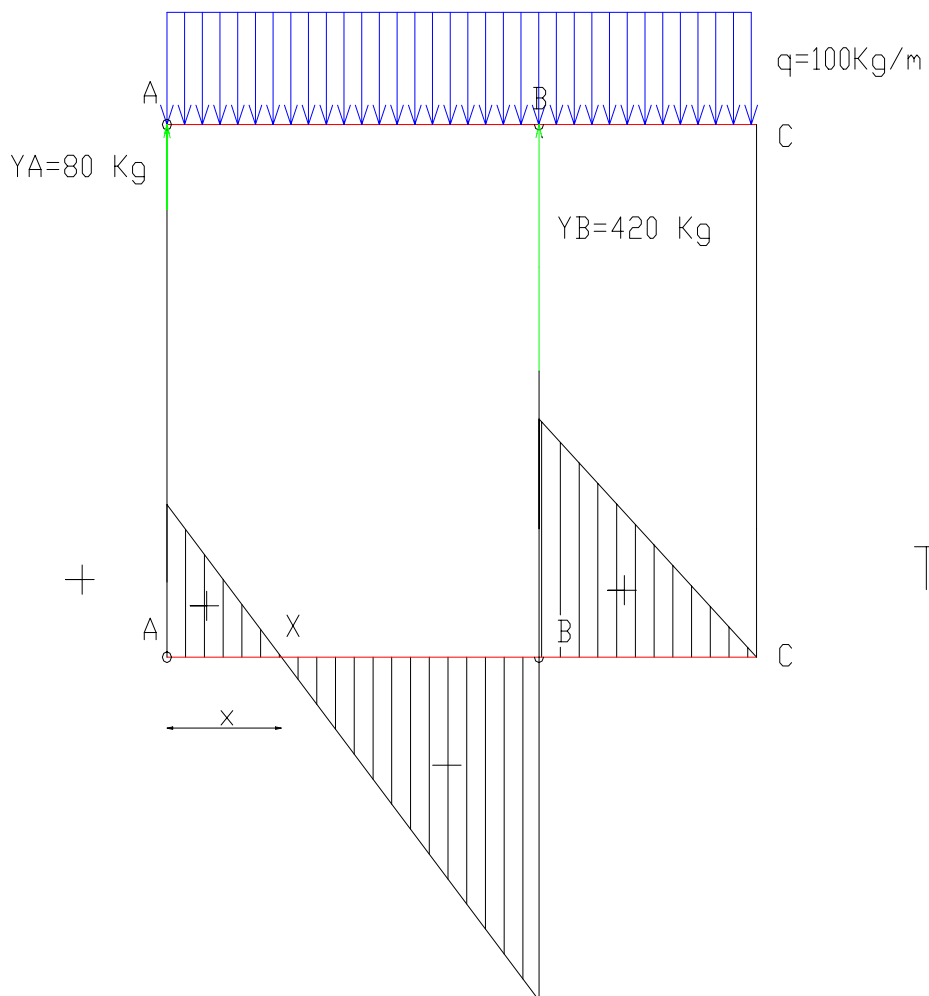
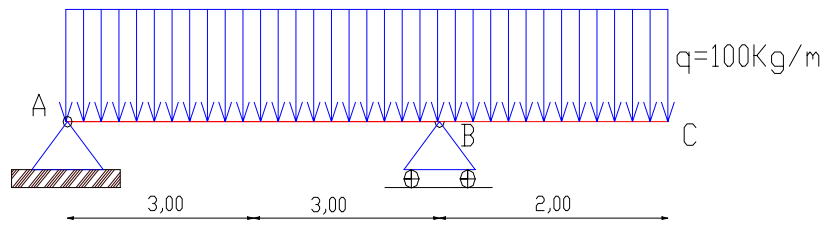
$M_C = + 120 \text{ Kg} * 1,5 \text{ m} = 180 \text{ Kg·m}$

$M_B = + 120 \text{ Kg} * 3,00 \text{ m} - 500 \text{ Kg} * 1,5 \text{ m} = - 390 \text{ Kg·m}$

$M_D = +120 \text{ Kg} * 5 \text{ m} - 500 \text{ Kg} * 3,5 \text{ m} + 580 \text{ Kg} * 2 \text{ m} = 0$

All'estremo libero di una mensola il momento è sempre zero

ESEMPIO :Trave con sbalzo e con carico uniformemente ripartito



$$T_A = + 80\text{ Kg}$$

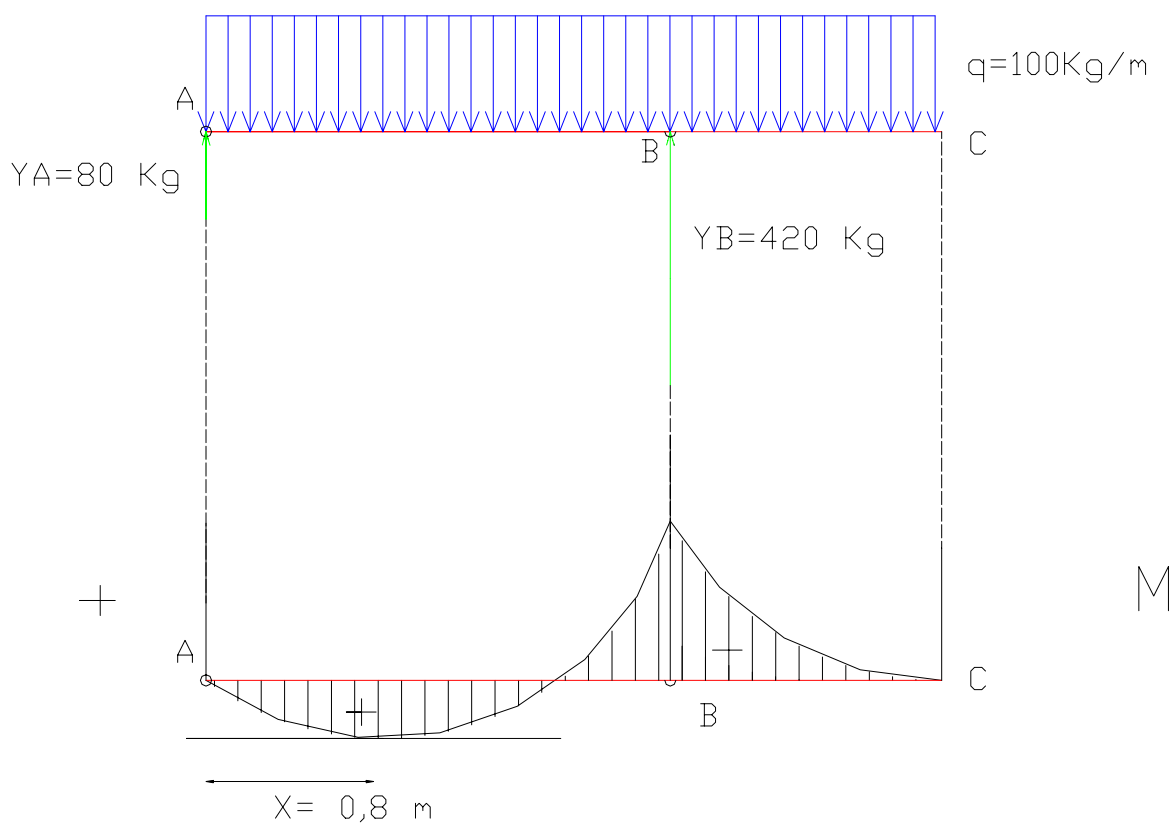
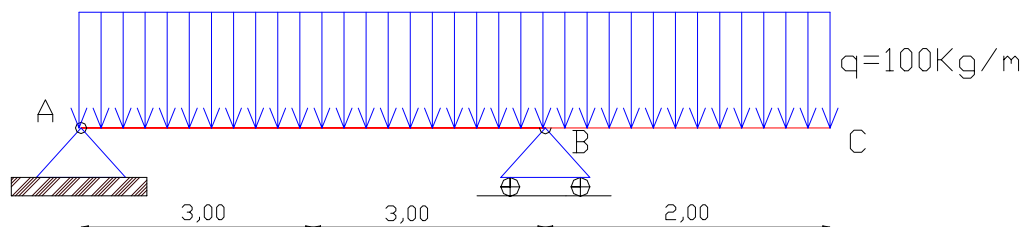
$$T_{Bs} = + 80\text{ Kg} - (100\text{Kg/m} * 3\text{m}) = - 220\text{ Kg}$$

$$T_{Bd} = + 80\text{ Kg} - (100\text{Kg/m} * 3\text{ m}) + 420\text{ Kg} = + 200\text{ Kg}$$

$$T_{Cs} = + 80\text{ Kg} - (100\text{ Kg/m} * 5\text{ m}) + 420\text{Kg} = 0$$

$$T_x = + 80\text{ Kg} - 100\text{ Kg/m} * X\text{ m} = 0 ; X = 0,8\text{ m}$$

ESEMPIO : Trave con sbalzo e con carico uniformemente ripartito



$$\begin{aligned}
 M_A &= 0 \\
 M_B &= + 80\text{ Kg} * 3 - 100\text{ Kg/m} * 3\text{ m} * 1,5\text{ m} = - 210\text{ Kg m} \\
 M_C &= +80\text{ Kg} * 5\text{ m} - 100\text{ Kg/m} * 5\text{ m} * 2,5\text{ m} + 420\text{ Kg} * 2 = 0
 \end{aligned}$$

$$M_x = +80\text{ Kg} * X - 100\text{ Kg/m} * X * X / 2 = +80\text{ Kg} * 0,8\text{ m} - 100\text{ Kg/m} * 0,80 * 0,80^2 / 2 = 32\text{ Kg m}$$

Dove il taglio è zero il momento fa la pancia
(la tangente è orizzontale)

LE SOLLECITAZIONI MECCANICHE

Un corpo qualsiasi (per esempio un pilastro, una trave, un solaio, una scala ecc.), sottoposto a sollecitazioni (forze esterne e reazioni vincolari) relativamente grandi, prima si deforma e infine si rompe.

Il nostro scopo è quello di progettare la struttura in maniera che non si deformi eccessivamente e non si rompa. Per esempio un pilastro che sopporta il peso del solaio soprastante, potrebbe schiacciarsi. Un solaio carico di persone potrebbe avvallarsi e rompersi.

Consideriamo un elemento monodimensionale (trave) avente certe dimensioni, e fatto di un certo materiale, questo sotto l'effetto delle forze applicate potrebbe rompersi. Il calcolo che si deve eseguire può svolgersi in due modi diversi, ma che rappresentano le due facce della stessa medaglia:

- 1. Calcolo di Verifica**
- 2. Calcolo di Progetto**

IL CALCOLO DI VERIFICA consiste nel verificare che l'elemento di assegnate dimensioni, sotto l'effetto dei carichi applicati non si rompa.

IL CALCOLO DI PROGETTO consiste nel determinare invece le dimensioni che deve avere l'elemento, affinché sotto l'effetto dei carichi applicati non si rompa.

SFORZO NORMALE CENTRATO

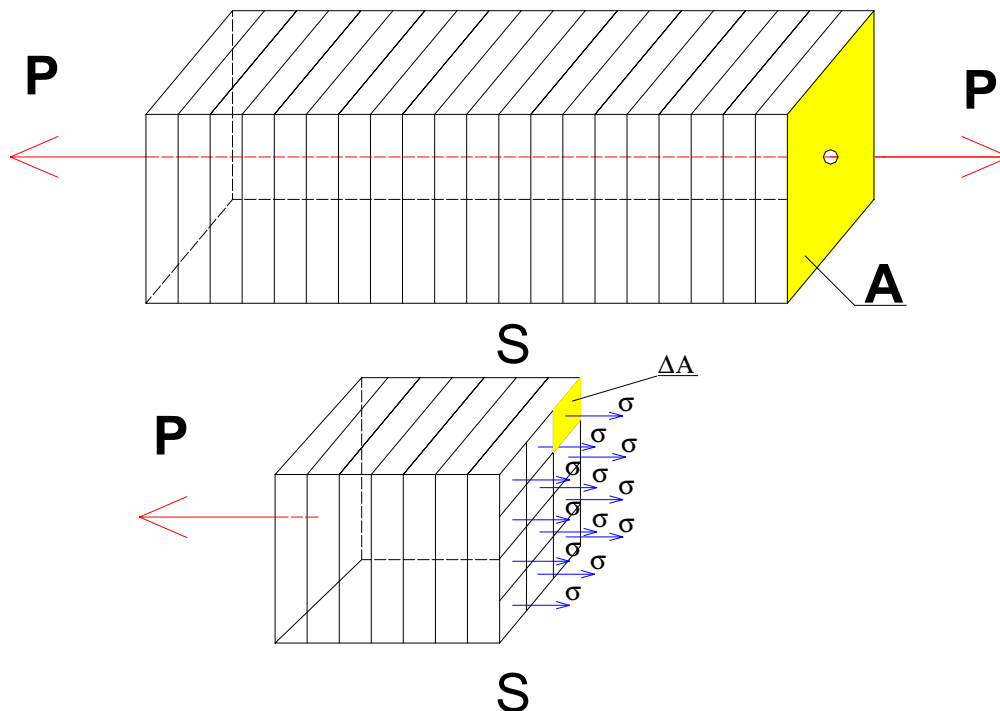
Lo sforzo normale si ha quando un corpo (trave o pilastro) viene sollecitato da forze applicate al baricentro delle sezioni e sono parallele all'asse (perpendicolari alle sezioni).

Se le forze sono disposte in maniera da allungare il corpo si parla di trazione; se sono applicate in maniera di accorciarlo si parla di compressione. I calcoli che svilupperemo sono identici sia per la trazione che per la compressione.

Consideriamo una trave a sezione rettangolare (lo stesso discorso vale qualunque sia la forma della sezione) ed applichiamo due forze, parallele all'asse della stessa, uguali e contrarie alle sue estremità, proprio nel baricentro delle sezioni. La trave è sollecitata a trazione. Se queste forze sono relativamente grandi, la trave si romperà.

Se immaginiamo di sezionare la trave (idealmente con una affettatrice) otterremo delle fettine di trave, se immaginiamo che queste fettine abbiano spessore infinitamente piccolo, avremo infiniti rettangoli infinitamente vicini uno all'altro, questi rettangoli sono le **sezioni**.

Le sezioni sono tenute assieme una all'altra da una "colla" cioè le forze di coesione molecolare. Questa "colla" è rappresentata dalle **tensioni interne**. In altre parole le tensioni interne sono delle forze che stanno su ogni sezione e sono ad essa perpendicolari e si oppongono all'allontanamento reciproco delle sezioni. Queste si chiamano tensioni interne normali (normali perché perpendicolari alla sezione) e si indicano con la lettera greca " σ ". *Le tensioni sono delle pressioni quindi sono delle forze diviso le superfici.*



Se applichiamo una sollecitazione di trazione all'elemento, e immaginiamo di tagliare la barra in una sezione qualsiasi S avremo questa situazione: all'estremo si ha la forza P e nella sezione S avremo tutte le tensioni normali (σ).

Se consideriamo la sezione S (rettangolo) e la dividiamo in tanti rettangolini molto piccoli, ognuno di area Δ_A , su ognuno di essi si troverà una σ , pertanto la forza che agisce su un rettangolino sarà uguale ad una σ moltiplicato per l'area del rettangolino ($\sigma * \Delta_A$); la **Sommatoria** di tutte le ($\sigma * \Delta_A$) sarà uguale al valore della risultante di tutte le σ cioè la forza P. Pertanto potremo scrivere:

$$\sum \sigma * \Delta_A = P$$

Quindi $\sigma * \sum \Delta_A = P$; ma $\sum \Delta_A = A$, quindi $\sigma * A = P$ da cui si ricava

$$\sigma = P / A$$

Questa formula ci permette di calcolare la tensione σ in un solido sollecitato a sforzo normale (trazione o compressione).

Siccome ogni materiale ha un valore della tensione ammissibile (**σ_{amm}**) cioè quella tensione massima che può sopportare prima di rompersi, la formula di verifica si scrive:

$$\sigma = P / A \leq \sigma_{amm} \quad \text{Formula di Verifica a Sforzo Normale}$$

Per quanto riguarda il **Progetto** si tratta di calcolare l'area della sezione dell'elemento, pertanto dalla formula inversa della precedente si scrive:

$$\mathbf{A = P / \sigma_{amm}} \quad \text{Formula di Progetto a Sforzo Normale}$$

ESEMPIO 1:

Verificare a trazione una barra d'acciaio a sezione rettangolare $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$; sollecitata da una forza di trazione $P = 5.000 \text{ Kg}$;

La Tensione ammissibile dell'acciaio è $\sigma_{amm} = 2.000 \text{ Kg/cm}^2$.

- Si applica la formula di verifica: $\sigma = P / A = 5.000 / 1 \cdot 2 = 2.500 \text{ Kg/cm}^2 < 2.000 \text{ Kg/cm}^2$

Siccome la tensione di calcolo è risultata inferiore a quella ammissibile, la barra risulta verificata.

ESEMPIO 2:

Progettare un pilastro in pietra a base quadrata che deve sopportare un carico assiale $P = 12.000 \text{ Kg}$. La tensione ammissibile è di 110 Kg/cm^2 .

- Si applica la formula di progetto: $A = P / \sigma = 12.000 / 110 = 109 \text{ cm}^2$, ciò vuol dire che il pilastro per potere sopportare il carico P deve avere una sezione di area $A = 109 \text{ cm}^2$. Essendo la sezione quadrata si può ricavare il lato: $l = \sqrt{A} = \sqrt{109} = 10.5 \text{ cm}$ che si arrotonda a 11 cm .

OSSERVAZIONE: - se la sezione fosse rettangolare si poteva assegnare un lato per esempio a e determinare l'altro lato $b = A/a$.

- Se la sezione fosse circolare si poteva determinare il raggio o il diametro:

$$R = \sqrt{A/\pi}; \quad D = 2 * \sqrt{A/\pi}$$

Abbiamo detto che ogni materiale ha la sua tensione ammissibile (σ_{amm}) essa viene determinata con le prove di laboratorio. Il suo valore lo troviamo sui manuali già calcolato per ogni tipo di materiale (acciaio, legno, calcestruzzo ecc.).

Per quanto riguarda la σ_{amm} dell'acciaio, possiamo dire che si determina in laboratorio con la **prova di trazione** (questa prova si studia nel corso di Tecnologia delle Costruzioni).

Dallo studio della prova di trazione e dal grafico che si ricava si sa che finché il carico raggiunge un certo limite, il materiale rimane nello stato elastico, cioè ritorna allo stato iniziale quando viene tolto il carico. In questa fase che è quella che a noi interessa, è valida la

$$\text{legge di HOOKE : } \sigma = E * \epsilon$$

E = Modulo di Yang o modulo di elasticità (valore costante per il materiale).

ϵ = Allungamento unitario = $\Delta l / l$ (allungamento diviso lunghezza iniziale)

Questa legge dice che la tensione è proporzionale alla deformazione.

Mediante la prova di trazione, veramente, si determina non la σ_{amm} , ma la σ di snervamento, cioè quel valore della σ oltre il quale non vale più la legge di Hooke. Allora per essere sicuri di

stare nel campo elastico si applica alla σ di snervamento un coefficiente di sicurezza (per l'acciaio è 2) ottenendo la $\sigma_{amm} = \sigma_{snerv} / 2$. In questo modo siamo sicuri che il materiale non raggiungerà mai la fase plastica.

OSSERVAZIONE:

Il metodo di verifica che abbiamo prima visto si chiama **Metodo delle Tensioni Ammissibili**, e consiste nel calcolare le tensioni massime per poi confrontarle con la tensione ammissibile. Questo procedimento lo faremo anche per gli altri tipi di sollecitazione.

Se pensiamo un attimo che in fondo noi andiamo a ricercare nella struttura la sezione più sollecitata (guardando i diagrammi di sollecitazione) e poi andiamo a verificare questa sezione con una tensione ammissibile che è più piccola della tensione di snervamento che a sua volta è più piccola della tensione di rottura, ci rendiamo conto come **in fondo esageriamo nel verificare la struttura, cioè essa non si rompe in realtà quando non è soddisfatta la formula di verifica, ma abbiamo ancora un largo margine di sicurezza. In ogni caso la legge impone di eseguire questo tipo di verifica per essere maggiormente sicuri.** Da qualche anno comunque la normativa ammette l'utilizzo di un altro metodo di verifica (**verifica agli stati limite**) in cui si ipotizza che la situazione più pericolosa per una struttura non avvenga contemporaneamente in tutte le sue parti, anzi si applicano delle teorie probabilistiche per determinare i coefficienti di sicurezza. Noi ci interesseremo elusivamente del metodo delle tensioni ammissibili che è ancora previsto dalla vigente normativa.

ALLUNGAMENTO o ACCORCIAMENTO per Sforzo Normale

Un elemento sollecitato a trazione si allunga di una certa quantità ; Lo stesso elemento sollecitato a compressione si accorcia di una certa quantità.

Se abbiamo per esempio una barra a sezione qualsiasi di area A e di lunghezza iniziale l , sollecitata da uno sforzo di trazione P , vogliamo determinare l'allungamento Δl della barra .

Siccome siamo nel campo elastico, vale la legge di Hooke : $\sigma = E * \varepsilon$

Essendoci sforzo normale possiamo scrivere: $\sigma = P / A$

Essendo $\varepsilon = \Delta l / l$ dalla prima equazione avremo:

$\sigma = E * \varepsilon = E * \Delta l / l$; e sostituendo nella seconda avremo $E * \Delta l / l = P / A$ da cui si ricava :

$$\Delta l = P * l / E * A$$

ESEMPIO:

L'asta in acciaio del corrente inferiore di una trave reticolare ha la lunghezza di $l = 3,00$ m e sezione rettangolare $1,5 \times 2,5$ cm. Essa è sollecitata da uno sforzo di trazione $S = 6000$ Kg. Determinare di quanto si allunga l'asta. Il modulo di elasticità dell'acciaio si assume $E = 2.100.000$ Kg/cm².

$$\Delta l = S * l / E * A = 6.000 * 300 / 2.100.000 * 1,5 * 2,5 = 0,23 \text{ cm (2,3 mm)}.$$

CARICO DI PUNTA

Quando un'asta è sollecitata a trazione, la sola verifica che si deve fare è quella a sforzo normale. Quando invece l'asta è sollecitata a compressione, può essere necessario eseguire una ulteriore verifica oltre lo sforzo normale, quella a carico di punta.

Se immaginiamo di comprimere un'asta che ha una lunghezza molto grande rispetto alle dimensioni trasversali della sezione, può succedere che questa si pieghi fino a spezzarsi. In altre parole se noi facessimo la verifica a solo sforzo normale, potremmo avere soddisfatta la formula di verifica, però l'asta si potrebbe rompere lo stesso; non per compressione, ma perché si deforma eccessivamente. Questo succede nelle aste “**snelle**” cioè lunghe e a piccola sezione.

Il concetto è questo:

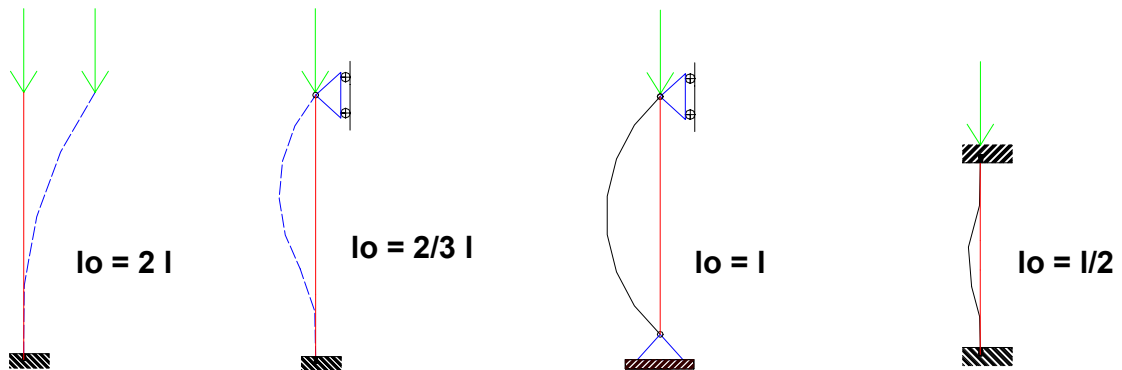
Immaginiamo di avere un'asta verticale a sezione per esempio quadrata sollecitata a compressione da un carico concentrato P che noi crediamo posto esattamente nel baricentro. Nella realtà sappiamo che il carico concentrato puntiforme non esiste, essendoci sempre una superficie di appoggio; per qualsiasi motivo (per esempio durante il montaggio) il carico quindi non è perfettamente centrato, ma distante dal baricentro di una quantità “ e ” (**eccentricità**) e si viene pertanto a creare un momento di trasporto: $M = P * e$; questo provoca la rotazione della parte superiore dell'asta quindi il carico P si allontana ancora dalla verticale baricentrica ed il momento di trasporto cresce perché cresce la distanza “ e ”. Andando avanti così la struttura si romperà. Se il carico P è però più piccolo, il momento di trasporto che si viene a creare è pure piccolo quindi non in grado di fare ruotare la struttura; esiste allora un valore del carico P (**carico critico**) oltre il quale quell'asta con quelle dimensioni si deforma cioè va in carico di punta. Se ci teniamo con il carico P ad un valore inferiore a quello critico siamo sicuri che non ci sarà carico di punta. Il problema di determinare il carico critico per un'asta sollecitata a compressione è stato studiato da Eulero il quale ha trovato una formula per calcolare il P critico; questa formula però cade in difetto quando la trave non è molto snella. Il metodo di Eulero è abbastanza laborioso da applicare, per cui è stato studiato un altro metodo detto “**metodo ω** ” che consiste in questo:

si determina il coefficiente ω ricavandolo per interpolazione lineare dalle tabelle riportate sui manuali, in funzione di un altro coefficiente “ λ ” (che si chiama **snellezza**), se λ è maggiore di un certo valore (λ_0); per la verifica a compressione si applica la formula: $\sigma = \omega * P / A$; se λ è inferiore a quel valore si applica la formula canonica.

Il certo valore prima detto è orientativamente :

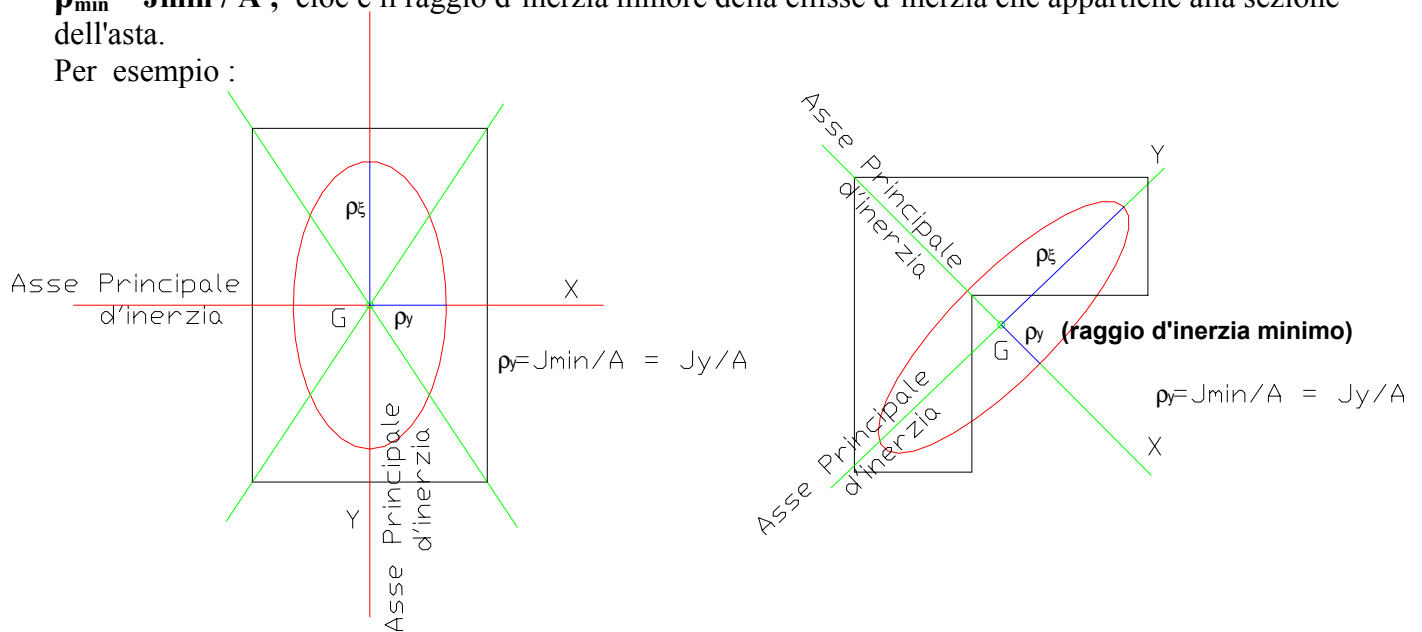
- Per il ferro $\lambda_0 = 105$
- Per la ghisa $\lambda_0 = 70$
- Per il legno $\lambda_0 = 80$
- Per la muratura $\lambda_0 = 50$

- La snellezza λ si calcola con la formula : $\lambda = l_0 / \rho_{\min}$ dove l_0 si chiama lunghezza teorica e dipende da come l'asta è vincolata.



$\rho_{\min} = J_{\min} / A$; cioè è il raggio d'inerzia minore della ellisse d'inerzia che appartiene alla sezione dell'asta.

Per esempio :



ω si determina dopo avere calcolato λ , mediante le tabelle riportate nei manuali. *Per esempio*

Legno – Coefficienti ω per carico di punta

λ	ω
120	4.63
130	5.48
140	6.51
150	7.65
160	8.91

Per $\lambda = 130$ si avrà $\omega = 5.48$

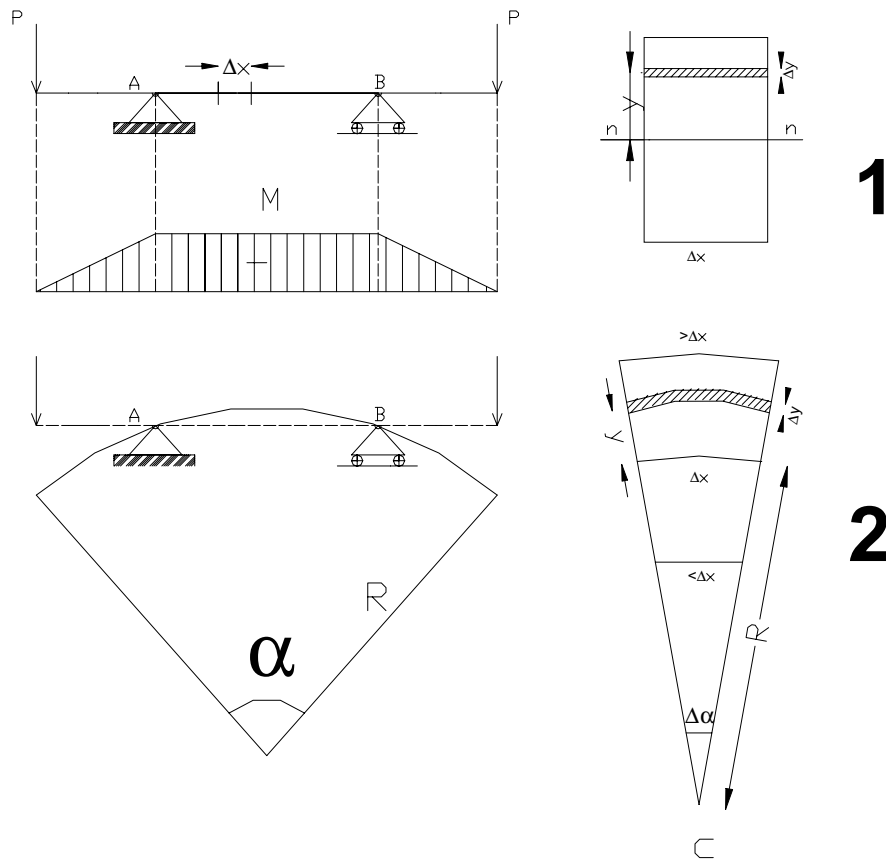
Per $\lambda = 140$ si avrà $\omega = 6.51$

Per $\lambda = 135$ si dovrà fare l'interpolazione lineare:

$$\omega = 5.48 + X; \text{ essendo } X = (6.51 - 5.48) * (135 - 130) / (140 - 130)$$

$$\omega = 5.48 + 0.515 = 5.995$$

FLESSIONE SEMPLICE RETTA



Consideriamo una trave, per semplicità a sezione rettangolare, appoggiata, come in figura. Sotto l'effetto delle forze esterne (e delle reazioni vincolari) la trave si deformerà secondo un **arco di cerchio**. Nella parte compresa fra A e B sappiamo che il momento flettente è negativo e costante (basta guardare il diagramma di sollecitazione del momento). Quindi la trave nel tratto A-B sarà sollecitata a **flessione semplice retta**, semplice perché c'è solo flessione (senza taglio); retta perché le forze esterne sono contenute nei piani principali d'inerzia. Nel nostro caso la sollecitazione agisce lungo l'asse Y della sezione. Ma l'asse Y è asse di simmetria, quindi è anche asse principale d'inerzia. Lo stesso se la sollecitazione agisse lungo l'asse X.

Si fa l'ipotesi (di Bernoulli) che durante la deformazione le **sezioni** della trave si mantengono **piane**, anche se ruotano. Inoltre siccome siamo nel campo elastico vale sempre la legge di **Hooke**.

Durante la deformazione si può vedere anche ad occhio nudo che la parte superiore della trave si allunga, mentre la parte inferiore si accorcia. Allora ci sarà una parte intermedia che non si allunga, ne si accorcia cioè rimarrà della lunghezza originaria. La traccia sul piano del foglio di questa superficie si chiama **asse neutro**. Quindi l'asse neutro è quella linea interna alla trave sulla quale le fibre non si allungano ne si accorciano, quindi non sono sollecitate ($\sigma = 0$). Sulla parte superiore invece ci saranno σ di trazione e su quella inferiore ci saranno σ di compressione. Però non sappiamo dove si trova esattamente l'asse neutro.

Immaginiamo di tagliare un tronchetto di trave lungo Δx e consideriamo le due situazioni:

- **1** tronchetto allo stato iniziale e **2** tronchetto deformato:

La fibra che si trova sull'asse neutro ha lunghezza Δx sia nella fase iniziale, sia nella fase deformata. Consideriamo una fibra della sezione distante una certa distanza y dall'asse neutro. Questa invece avrà lunghezza Δx nella fase iniziale lunghezza $>$ di Δx nella fase deformata.

Ebbene ci chiediamo adesso di quanto si è allungata la fibra a causa della deformazione.

L'allungamento di questa fibra sarà uguale alla lunghezza finale meno quella iniziale cioè possiamo scrivere:

$$\text{Allungamento fibra } \Delta l = (R + y) * \Delta\alpha - \Delta x$$

$$\text{ma } \Delta x = R * \Delta\alpha \quad \text{quindi sostituendo avremo:}$$

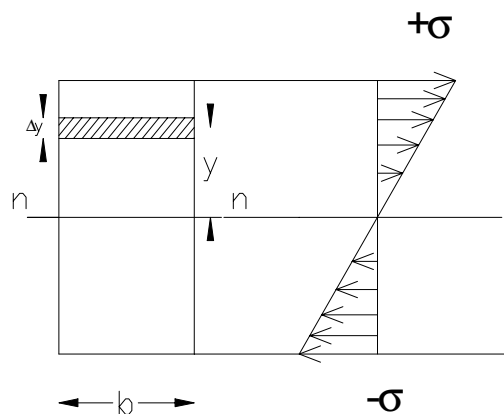
$$\Delta l = (R + y) * \Delta\alpha - R * \Delta\alpha = R * \Delta\alpha + y * \Delta\alpha - R * \Delta\alpha = y * \Delta\alpha \quad (\text{di quanto si è allungata la fibra})$$

$$\text{Siccome è } \varepsilon = \Delta l / \Delta x \quad \text{avremo} \quad \varepsilon = y * \Delta\alpha / R * \Delta\alpha = y / R$$

e per la legge di Hooke ($\sigma = E * \varepsilon$) si avrà $\sigma = E / R * y$ Questa è la formula di **Bernoulli** per la flessione semplice retta. Essa dice che le σ in una determinata fibra della sezione sono proporzionali alla distanza y fra la fibra e l'asse neutro.

Possiamo allora dedurre subito che le σ hanno andamento triangolare cioè sono massime nei punti più lontani della sezione rispetto all'asse neutro. Però non conosciamo ancora la posizione dell'asse neutro, nè il raggio R di curvatura. La formula di Bernoulli è stata sviluppata ulteriormente da Navier arrivando ad una formulazione più comoda per i calcoli:

Consideriamo adesso una sezione della trave.



Questa sezione è divisa in due parti dall'asse neutro: la parte superiore e la parte inferiore. Sulla parte superiore agiscono le σ di trazione, dirette verso l'esterno, mentre sulla parte inferiore agiscono le σ di compressione, dirette verso l'interno. Entrambe sono perpendicolari alla sezione. Per l'equilibrio della sezione (siccome essa non va ne avanti ne indietro), la risultante delle σ di trazione deve essere uguale alla risultante delle σ di compressione. Se pensiamo di suddividere la sezione in tante striscioline larghe b ed alte Δy , di area ognuna $\Delta A = (b * \Delta y)$ anche queste striscioline sono in equilibrio, cioè la forza che sta sulle striscioline superiori è uguale e contraria

alla forza che sta sulle striscioline inferiori cioè la **Sommatoria**, estesa a tutta la sezione, delle forze, deve essere uguale a zero:

$$\Sigma (b * \Delta y) * \sigma = 0 ; \text{ dove sostituendo } \sigma = E / R * y \text{ (Bernoulli)}$$

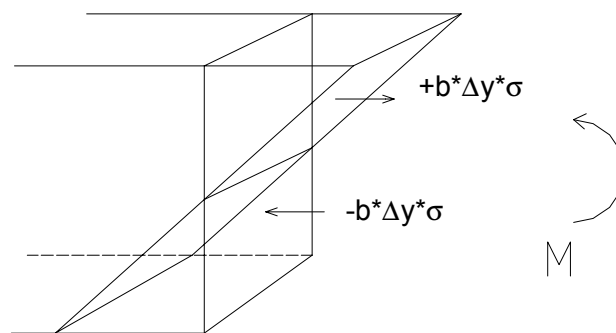
avremo $\Sigma b * \Delta y * E / R * y = 0$; che si può anche scrivere : $E / R * \Sigma (b * \Delta y) * y = 0$;

$$\Sigma (b * \Delta y) * y = 0$$

$(b * \Delta y) * y$ rappresenta il momento statico della strisciolina ΔA rispetto all'asse neutro ;

$\Sigma (b * \Delta y)$ rappresenta il **momento statico** di tutte le striscioline cioè dell'intera sezione rispetto all'asse neutro ed è uguale a zero. Allora siccome sappiamo che il momento statico di una figura fatto rispetto all'asse passante per il baricentro è sempre zero; e siccome il momento statico della nostra sezione fatto rispetto all'asse neutro è zero, possiamo asserire che **l'asse neutro è baricentrico della sezione inflessa**.

Passiamo ora a considerare l'equilibrio alla rotazione della sezione attorno all'asse neutro.



La sezione è sollecitata a ruotare dal momento esterno M . Per l'equilibrio, questo momento deve essere uguale al momento generato dalle forze interne (cioè dalle forze create dalle σ) :

Quindi possiamo scrivere che : $M = \Sigma \sigma * (b * \Delta y) * y$ dove sostituendo $\sigma = E / R * y$ (Bernoulli)

Avremo : $M = \Sigma E / R * y * (b * \Delta y) * y = E / R \Sigma y * (b * \Delta y) * y$

$$M = E / R \Sigma (b * \Delta y) * y^2 ;$$

ma $(b * \Delta y) * y^2$ rappresenta il momento d'inerzia della strisciolina ΔA rispetto all'asse neutro che ormai sappiamo essere baricentrico, per cui la **Sommatoria** $\Sigma (b * \Delta y) * y^2$ rappresenta il **momento d'inerzia** dell'intera sezione rispetto all'asse neutro baricentrico, che indichiamo con J , per cui scriviamo :

$$M = E / R * J \text{ (formula di Navier)}$$

Ricavando $E / R = \sigma / y$ dalla formula di Bernoulli ($\sigma = E / R * y$) e sostituendo si avrà:

$$M = \sigma / y * J, \text{ quindi :}$$

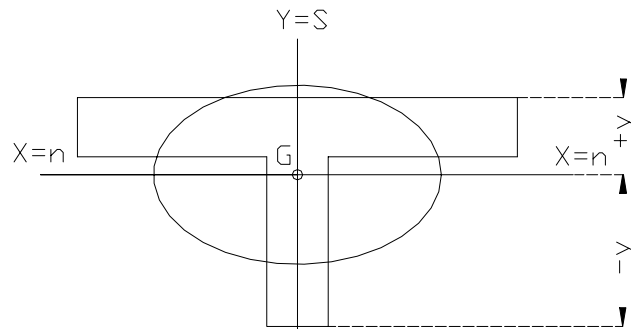
$\sigma = M * y / J$ che è la formula di **Bernoulli-Navier** per la flessione semplice retta.

Il rapporto J/y è il **modulo di resistenza** W per cui si può scrivere $\sigma = M / W$.

OSSERVAZIONE:

L'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia; anzi se la flessione è retta, sono i due assi principali d'inerzia. Pertanto se l'asse di sollecitazione coincide con l'asse Y, l'asse neutro sarà l'asse X cioè il suo coniugato e viceversa.

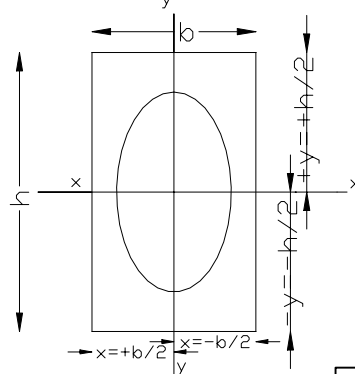
Questo concetto serve a trovare l'asse neutro in una sezione qualsiasi soggetta a flessione retta: noto l'asse di sollecitazione, si disegna l'ellisse e si trova il diametro coniugato dell'asse di sollecitazione. Oppure noto l'asse di sollecitazione ed il baricentro si disegna un'asse passante per il baricentro e perpendicolare all'asse di sollecitazione, questo è il suo asse coniugato quindi l'asse neutro.



Caso della Sezione Rettangolare:

La formula di Bernoulli-Navier si scrive per la sezione rettangolare : $\sigma = +/- M / W$ dove sappiamo che $W_x = b * h^2 / 6$ e $W_y = h * b^2 / 6$

- Se l'asse di sollecitazione è l'asse Y : $\sigma = +/- M / W_x$
- Se l'asse di sollecitazione è l'asse X : $\sigma = +/- M / W_y$



OSSERVAZIONE:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} b \text{---} \\ \hline \end{array} \quad h \quad W = b * h^2 / 6$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad b \quad W = h * b^2 / 6$$

Se abbiamo una trave a sezione rettangolare sollecitata a flessione, è sempre meglio disporla nel secondo modo piuttosto che come il primo, così resisterà maggiormente, in quanto il modulo di resistenza è molto maggiore.

Calcolo di verifica della sezione rettangolare

Si calcola prima il modulo di resistenza $W = b * h^2 / 6$

Poi si determina la $\sigma = 6 M / W$ si otterranno due valori uguali ma di segno opposto e si confrontano con la σ_{amm} del materiale di cui è fatta la trave, se la σ calcolata è inferiore o al limite uguale a quella ammissibile, la sezione è verificata. In caso contrario si passa al

Calcolo di progetto della sezione rettangolare:

Si calcola innanzi tutto il modulo di resistenza che la trave dovrebbe avere per resistere al momento dato:

$$W = M / \sigma_{amm}$$

Siccome sappiamo che $W = b * h^2 / 6$; se poniamo $b = 0,7 * h$ avremo

$W = b * h^2 / 6 = 0,7 * h * h^2 / 6 = 0,7 * h^3 / 6$; mettiamo al posto di W il valore calcolato e ricaviamo :

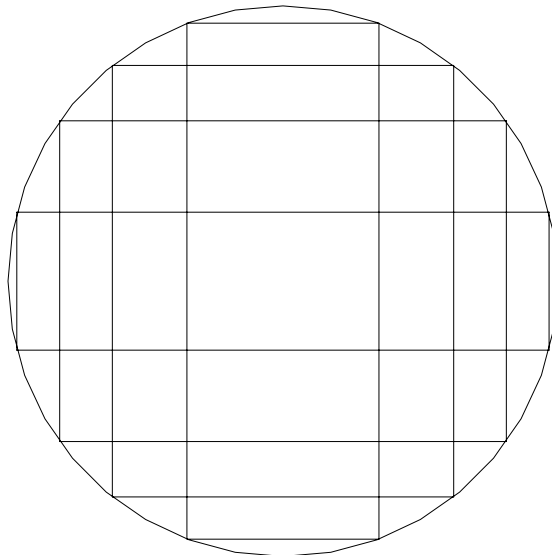
$$h = \sqrt[3]{6M / 0,7}$$

una volta calcolato h si può ricavare $b = 0,7 * h$.

b ed h sono le dimensioni da assegnare alla trave perché resista al momento flettente dato.

OSSERVAZIONE:

Il motivo per cui si pone $b = 0,7 * h$ sta in ciò: le travi in legno si ricavano dai tronchi degli alberi (sezione circolare). Dalla sezione circolare si potrebbero ricavare infinite sezioni diverse di forma rettangolare, ognuna avrebbe base e altezza diversa, quindi diverso modulo di resistenza. Il problema di trovare fra tutte le infinite sezioni possibili, quella che ha il W massimo è stato risolto matematicamente, e questo si ha scegliendo la sezione tale che la base e l'altezza siano nel rapporto di circa 0,7.-

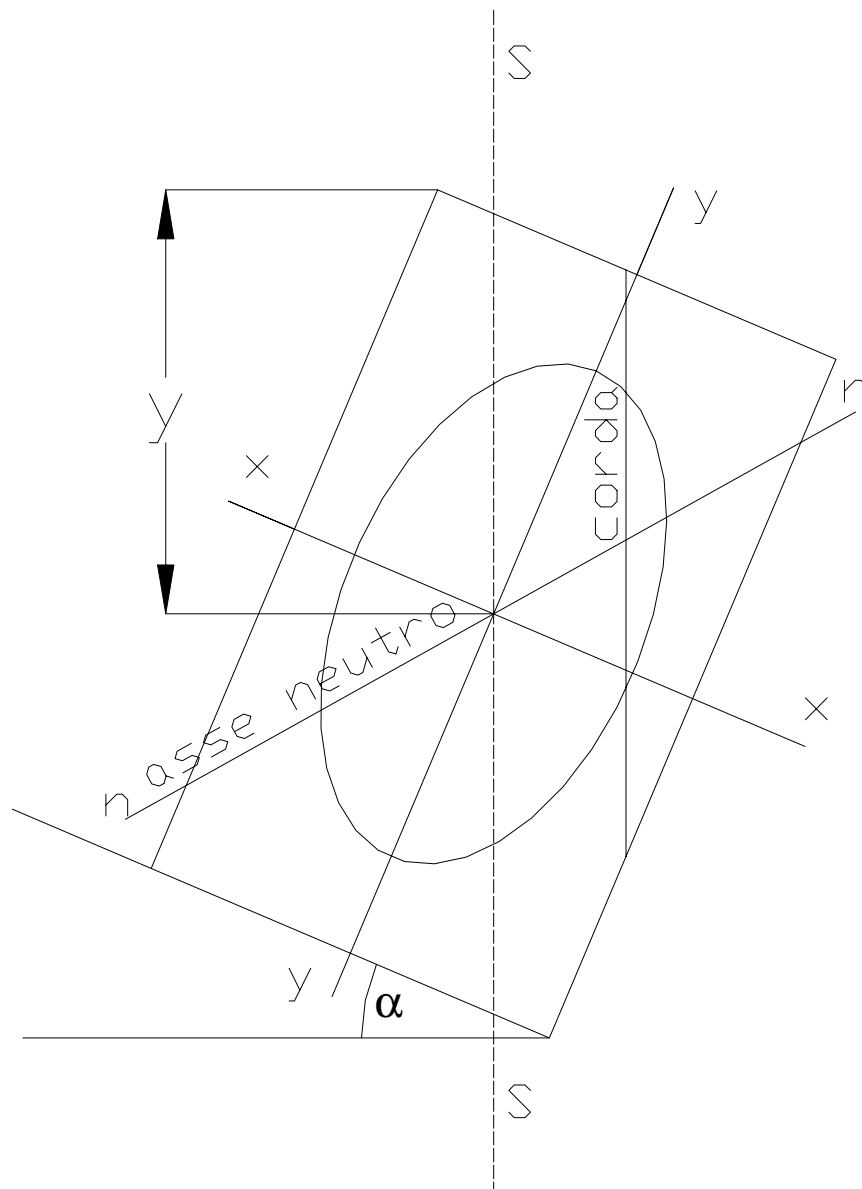


FLESSIONE DEVIATA

Quando l'asse di sollecitazione non coincide con uno degli assi principali d'inerzia della sezione, allora si parla di **flessione deviata**.

Consideriamo una sezione rettangolare in cui l'asse di sollecitazione sia inclinato di un angolo α rispetto all'asse Y. Allora siccome l'asse di sollecitazione non coincide con l'asse Y e nemmeno con l'asse X si avrà flessione deviata. Allora l'asse neutro non sarà né l'asse X, né l'asse Y.

Sappiamo però che l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono **coniugati** rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione rettangolare, anche se però non potranno essere perpendicolari (perché solo i due assi principali sono coniugati ed anche perpendicolari). Per potere individuare l'asse neutro quindi è necessario disegnare prima l'ellisse e trovare l'asse neutro come coniugato dell'asse di sollecitazione:



A questo punto per applicare la formula di Bernoulli-Navier $\sigma = M * y / J$ bisogna ricavare graficamente sul disegno la distanza y fra l'asse neutro e il punto più distante della sezione e poi il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro che è sempre baricentrico. Questo si può calcolare con l'espressione $J = A * \rho_n^2$ dove A è l'area della sezione e ρ_n è il raggio coniugato dell'asse neutro cioè il raggio d'inerzia che sta sull'asse coniugato all'asse neutro (l'asse di sollecitazione). Anche ρ_n si ricava graficamente dal disegno.

La precisione di questo metodo è legata alla precisione del disegno inoltre è molto lungo.

Si può effettuare la verifica a flessione deviata facendo un altro procedimento analitico, quindi più preciso, e più sbrigativo:

Se decomponiamo il vettore momento M che sta sull'asse di sollecitazione nelle due componenti M_x parallelo all'asse X ed M_y parallelo all'asse Y :

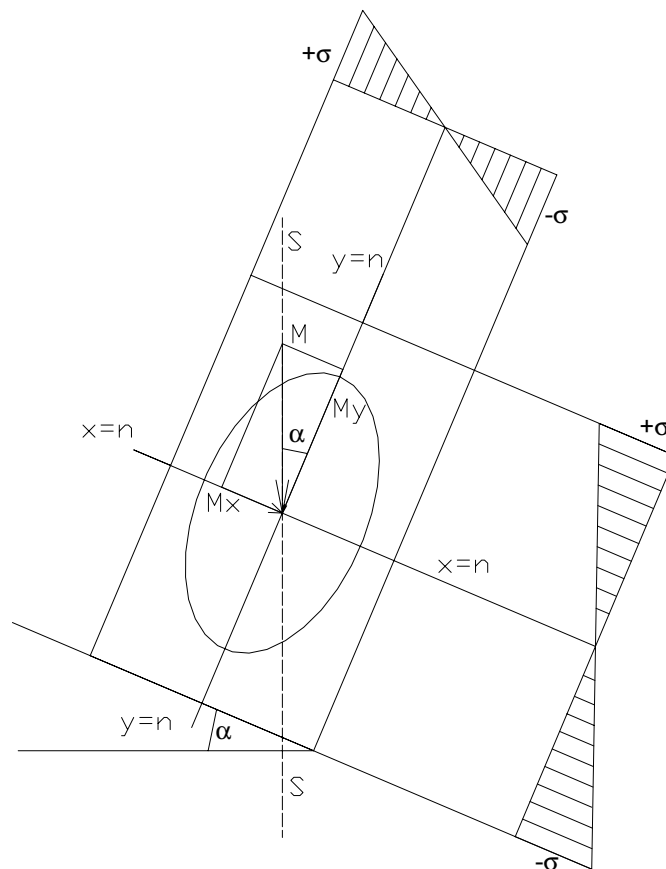
$$M_x = M \sin \alpha$$

$$M_y = M \cos \alpha$$

Si possono ricavare le due tensioni σ come se avessimo contemporaneamente due flessioni rette, una con asse di sollecitazione X e l'altra con asse di sollecitazione Y :

La σ totale (cioè dovuta alla flessione deviata) sarà la somma di tutte e due:

$$\sigma_1 = +/- M_x / W_y \quad \sigma_2 = +/- M_y / W_x \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$



PRESSOFLESSIONE

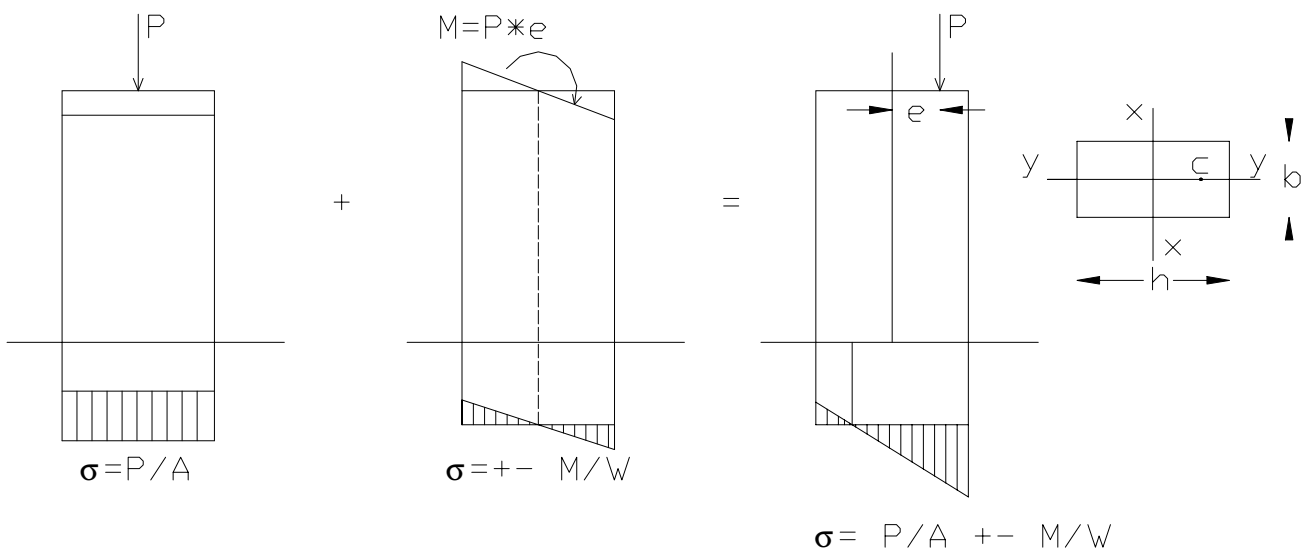
La presso-flessione è una sollecitazione composta costituita dalla combinazione della sollecitazione di sforzo normale (compressione) e da quella di flessione.

Quando si calcola una sezione a presso flessione, quindi si può studiare il caso come se ci fosse prima solo compressione e trovare il valore della σ di compressione; poi come se ci fosse solo flessione e si calcola il valore della σ di flessione; poi siccome sappiamo che le due sollecitazioni agiscono contemporaneamente, si sommano le σ di compressione con quelle di flessione ottenendo la σ di presso flessione.

Immaginiamo di avere un solido a sezione rettangolare, schiacciato da una forza P verticale posizionata su un'asse di simmetria, ma spostata rispetto al baricentro ad una certa distanza che chiameremo **eccentricità** (e). Il punto di applicazione della forza P si chiama **centro di pressione**.

A causa della distanza della forza dal baricentro, nella sezione nascerà un momento di trasporto $M = P * e$ che farà ruotare la sezione, quindi si avrà : compressione a causa della forza di schiacciamento P e flessione retta a causa del **momento di trasporto** ($M = P * e$).

Possiamo allora disegnare il diagramma delle tensioni di compressione $\sigma = P/A$ che saranno costanti, quindi si rappresentano con un rettangolo; ed il diagramma di flessione retta che sappiamo essere triangolare intrecciato. L'asse neutro per la flessione retta sappiamo essere baricentrico; però in realtà nella sezione non c'è solo flessione, ma anche compressione, per cui l'asse neutro per presso flessione non sarà più baricentrico. Esso sarà spostato rispetto al baricentro di una certa distanza y_0 che vedremo dopo come si determina.



OSSERVAZIONE:

Nella pratica si riscontrano spesso, sostegni, soggetti a forze orizzontali prodotte per esempio dal vento (per esempio un palo di sostegno di un'insegna pubblicitaria) in questi casi si calcola il palo a presso-flessione dove il momento M di trasporto è costituito dal momento prodotto dalle forze orizzontali.

Allora la tensione massima dovuta alla presso-flessione si calcola con la formula:

$$\sigma = (P / A) \pm (M / W)$$

Ossia la σ di compressione più o meno la σ di flessione. Dove A è l'area della sezione $A = b * h$; P è il carico esterno; $M = P * e$ il momento di trasporto e W il modulo di resistenza della sezione $W = J/y$ (nel caso della sezione rettangolare $W = b * h^2 / 6$), quindi sostituendo, la formula diventa, **per la sezione rettangolare**:

$\sigma = (P / b * h) \pm (P * e / b * h^2 / 6)$ e semplificando avremo:

$$\sigma = P / b * h * (1 \pm 6 * e / h)$$

Ricerca dell'asse neutro :

Riscriviamo la formula di verifica alla presso-flessione : $\sigma = (P / A) + (M / W)$

Sostituiamo al posto di M il suo valore $P * e$ ed al posto di W il valore J / y , si avrà:

$$\sigma = P / A + P * (e / J) * y$$

dove y è la distanza fra una fibra qualsiasi e il baricentro. La distanza y la consideriamo per convenzione positiva se a destra del baricentro e negativa se a sinistra.

Se poniamo $\sigma = 0$ vuol dire che siamo sull'asse neutro (dove sappiamo che le σ sono zero) :

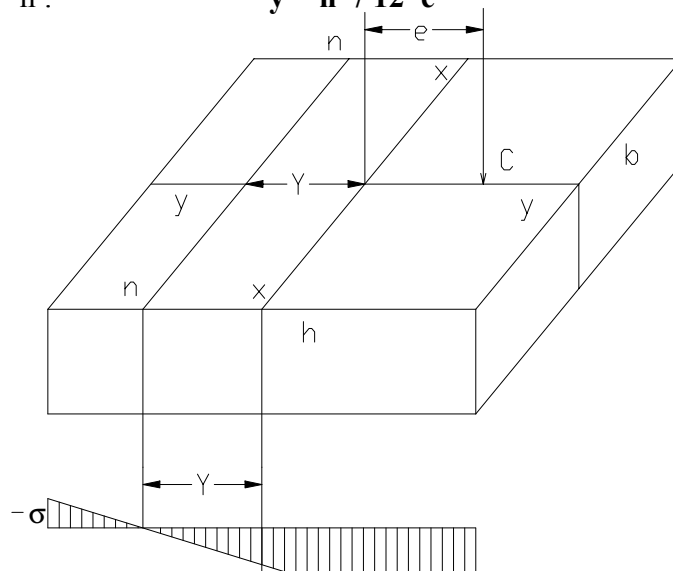
$$\sigma = 0 = P / A + P * (e / J) * y \quad \text{cioè} \quad 1/A + (e / J) * y = 0$$

allora in questa equazione la y rappresenta la **distanza fra l'asse neutro ed il baricentro** e si può ricavare:

$$y = - J / (A * e)$$

Nel caso della **sezione rettangolare** la formula si semplifica sostituendo al posto di $J = b * h^2 / 12$ ed al posto di $A = b * h$:

$$y = h^2 / 12 * e$$



OSSERVAZIONE:

Dalla prima equazione si ricava : $e * y = - J / A$

Da questa possiamo osservare che il prodotto ($e * y$) è negativo; quindi e ed y sono di segno opposto, cioè se uno è negativo l'altro è positivo e viceversa. Questo vuol dire che e ed y stanno uno a destra ed uno a sinistra dell'asse neutro o viceversa. Non stanno mai dalla stessa parte. Inoltre il rapporto (J / A) è costante per cui se e aumenta , y deve diminuire e viceversa. In altre parole il centro di pressione e l'asse neutro stanno sempre uno da una parte ed uno dall'altra rispetto all'asse neutro; se il centro di pressione si avvicina al baricentro, allora l'asse neutro si allontana e viceversa. Possiamo idealmente immaginare il centro di pressione e l'asse neutro come “due giocatori di tennis” dove l'asse neutro è la rete.

Conoscere la posizione dell'asse neutro è molto importante in quanto esso individua nella sezione qual è la parte tesa e quale quella compressa.

Se il materiale di cui è composto il solido resiste sia a trazione che a compressione (per esempio legno, acciaio), non ci sono problemi, ma se il materiale resiste solo a compressione e non a trazione (per esempio la muratura) allora quella parte tesa si romperà.

PRESSOFLESSIONE PER SOLIDI NON REAGENTI A TRAZIONE **(per esempio Muratura Ordinaria)**

Nel caso in cui il materiale di cui è fatta la sezione non è resistente agli sforzi di trazione succede che la sezione si parzializza, cioè la parte tesa si rompe. Ora siccome la formula della pressoflessione l'abbiamo ricavata pensando che tutta la sezione reagisse, ovviamente detta formula cade in difetto nel caso di materiali non reagenti a trazione. Allora bisogna trovare un'altra formula.

Innanzitutto però conviene fare il seguente ragionamento: Dividiamo in tre parti uguali la sezione, e consideriamo la parte centrale, questa si chiama **terzo medio**.

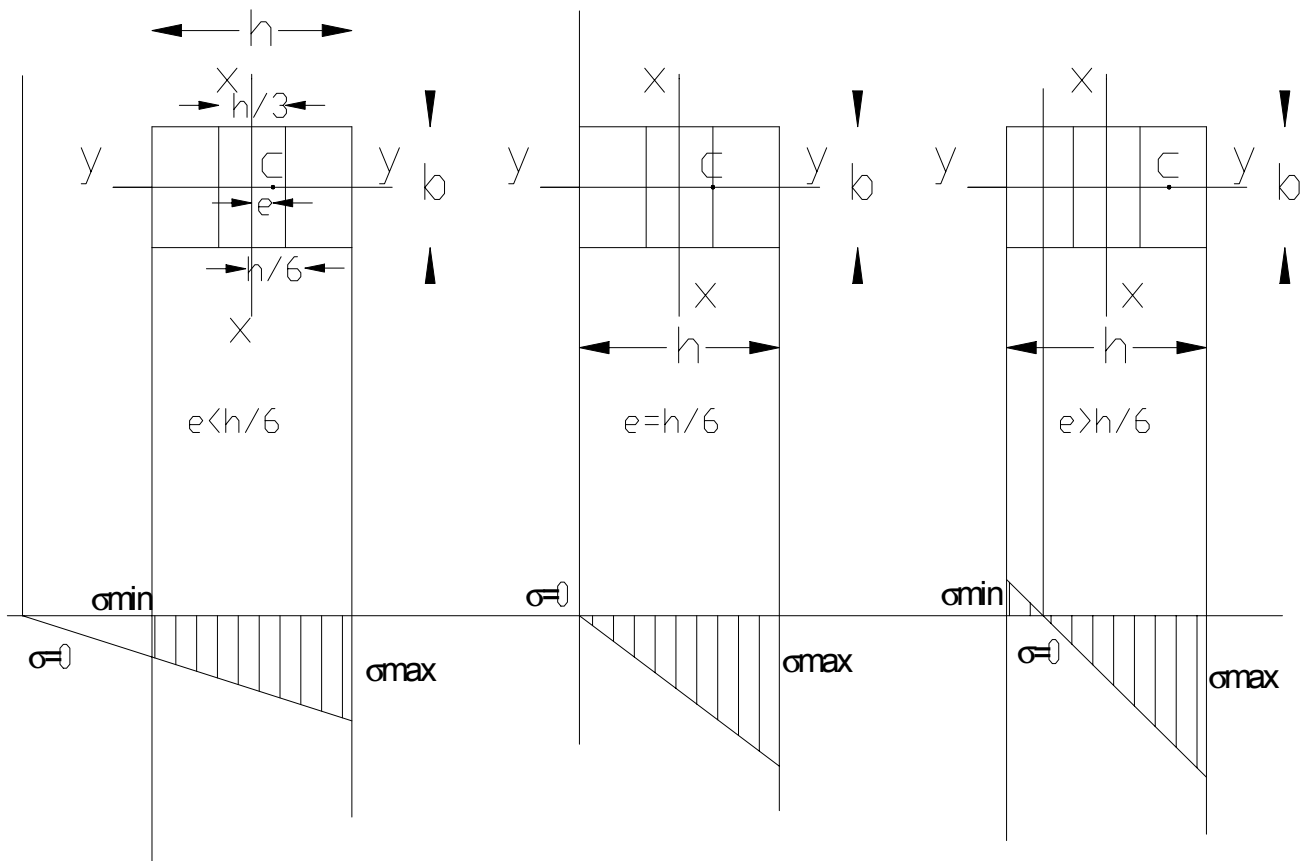
Possiamo avere tre casi:

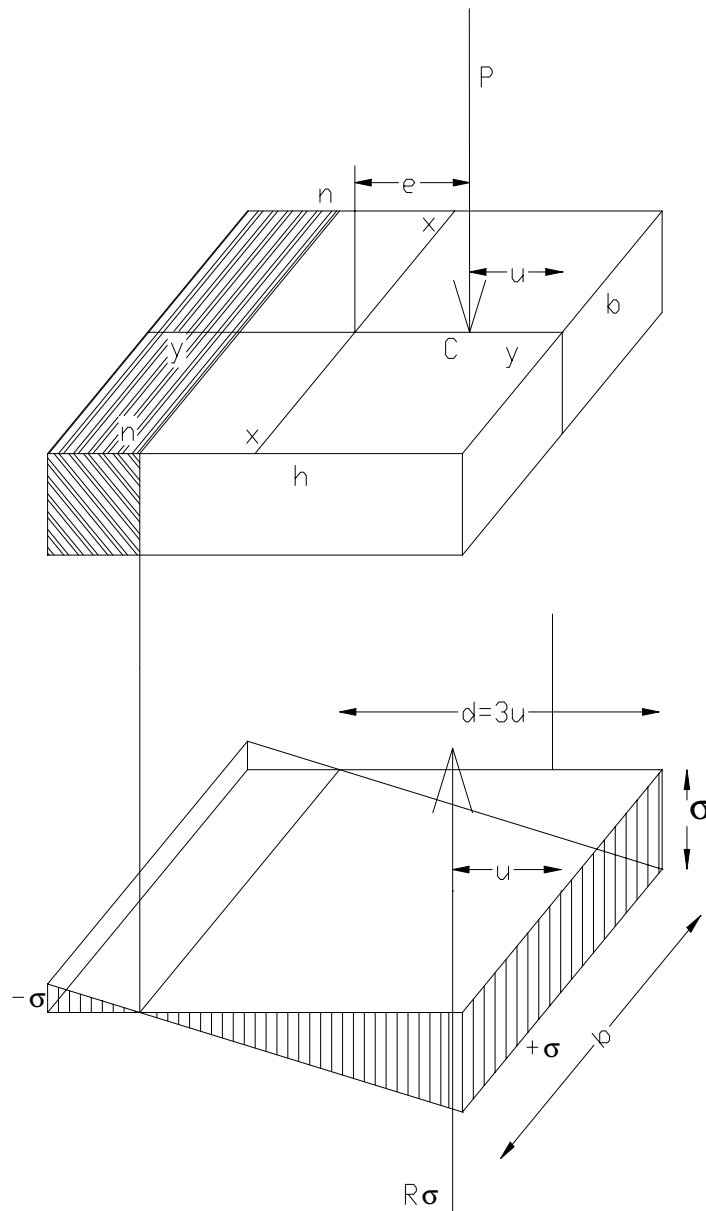
1. Il centro di pressione cade all'interno del terzo medio ($e < h/6$)
2. Il centro di pressione cade sul bordo del terzo medio ($e = h/6$)
3. Il centro di pressione cade fuori del terzo medio ($e > h/6$)

Se ci ricordiamo la relazione tra centro di pressione ed asse neutro, si capisce perché :

- Nel primo caso, l'asse neutro cade fuori della sezione, per cui si avrà un diagramma delle σ trapezoidale e la sezione è interamente compressa (non ci sono sforzi di trazione) quindi si può ancora applicare la formula $\sigma = (P / A) +/- (M / W)$
- Nel secondo caso l'asse neutro è tangente alla sezione, si avrà un diagramma delle σ triangolare e la sezione è ancora interamente compressa; si può ancora applicare la formula di prima.

- Nel terzo caso l'asse neutro taglia la sezione, si avrà allora un diagramma triangolare intrecciato in quanto la sezione è in parte compressa ed in parte tesa. Allora non si può usare la formula binomia e bisognerà ricavarne un'altra.





La parte di sezione tesa, siccome si rompe non si considera. Anche il diagramma delle σ tese è come se non esistesse, esiste solo il diagramma della σ compresse che ha forma di un prisma triangolare. Il volume di questo prisma triangolare rappresenta la risultante delle σ di compressione $R\sigma = \sigma * b * d$.

Per l'equilibrio la forza P deve essere uguale ed opposta alla $R\sigma$ cioè $P = R\sigma$, e inoltre le due forze devono passare per lo stesso punto C , quindi siccome la $R\sigma$ è applicata al baricentro del prisma triangolare alto d , essa deve cadere nel baricentro cioè a $d/3$ che deve essere uguale a u .

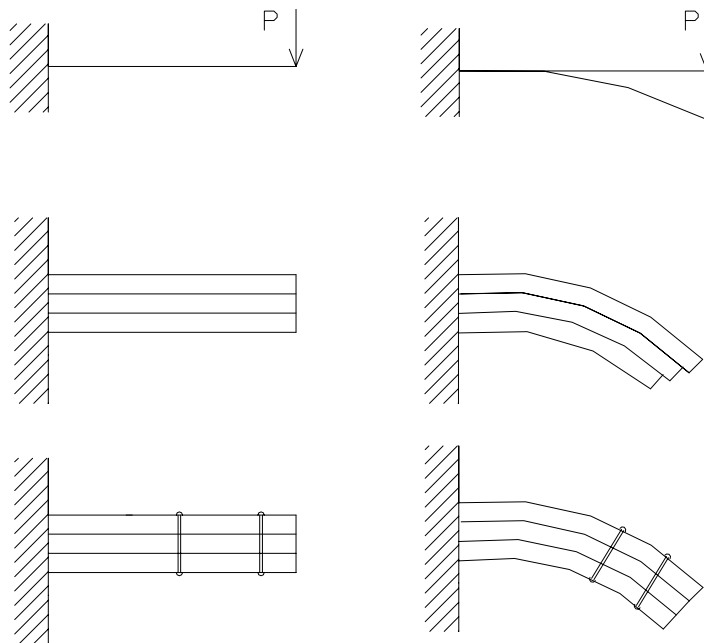
Quindi possiamo scrivere: $P = R\sigma$ cioè:

$P = \sigma * b * d = \sigma * b * 3u$ da cui si ricava $\sigma = 2 * P / 3u * b$
 questa è la formula per calcolare la tensione massima di compressione nei solidi non reagenti a trazione. La tensione massima va quindi confrontata con quella ammissibile.

TAGLIO

Veramente si dovrebbe parlare di **flessione e taglio** in quanto il taglio da solo non esiste mai, ma è sempre accompagnato dalla flessione. In una certa parte di una trave inflessa ci può essere solo flessione senza taglio, ma non solo taglio senza flessione (basta guardare i diagrammi di sollecitazione).

Consideriamo una mensola con un carico per esempio verticale; sotto l'effetto del carico P, la trave si inflette, facendo la pancia verso l'alto. Se immaginiamo di tagliare la trave in diverse strisce parallele all'asse, prima di caricarla, vedremo che durante la flessione, le strisce scorrono una sull'altra. Se invece fissiamo le strisce per esempio con dei chiodi, la trave si comporta come se fosse ancora intera. Questo ci dimostra che all'interno della trave durante la flessione, nasce una forza parallela all'asse della trave che si chiama **forza di scorrimento**. Quando mettiamo i chiodi, la forza di scorrimento viene assorbita dagli stessi. Pertanto lungo le facce parallele all'asse della trave, nasceranno delle tensioni tangenziali che si chiamano τ (dal greco tau) ; oltre quelle normali che abbiamo già visto (σ).



Riprendiamo la nostra mensola e consideriamo un tronchetto di trave lungo Dx , delimitato dalle sezioni S1 ed S2. Calcoliamo il momento delle forze sulla sezione 1 e 2:

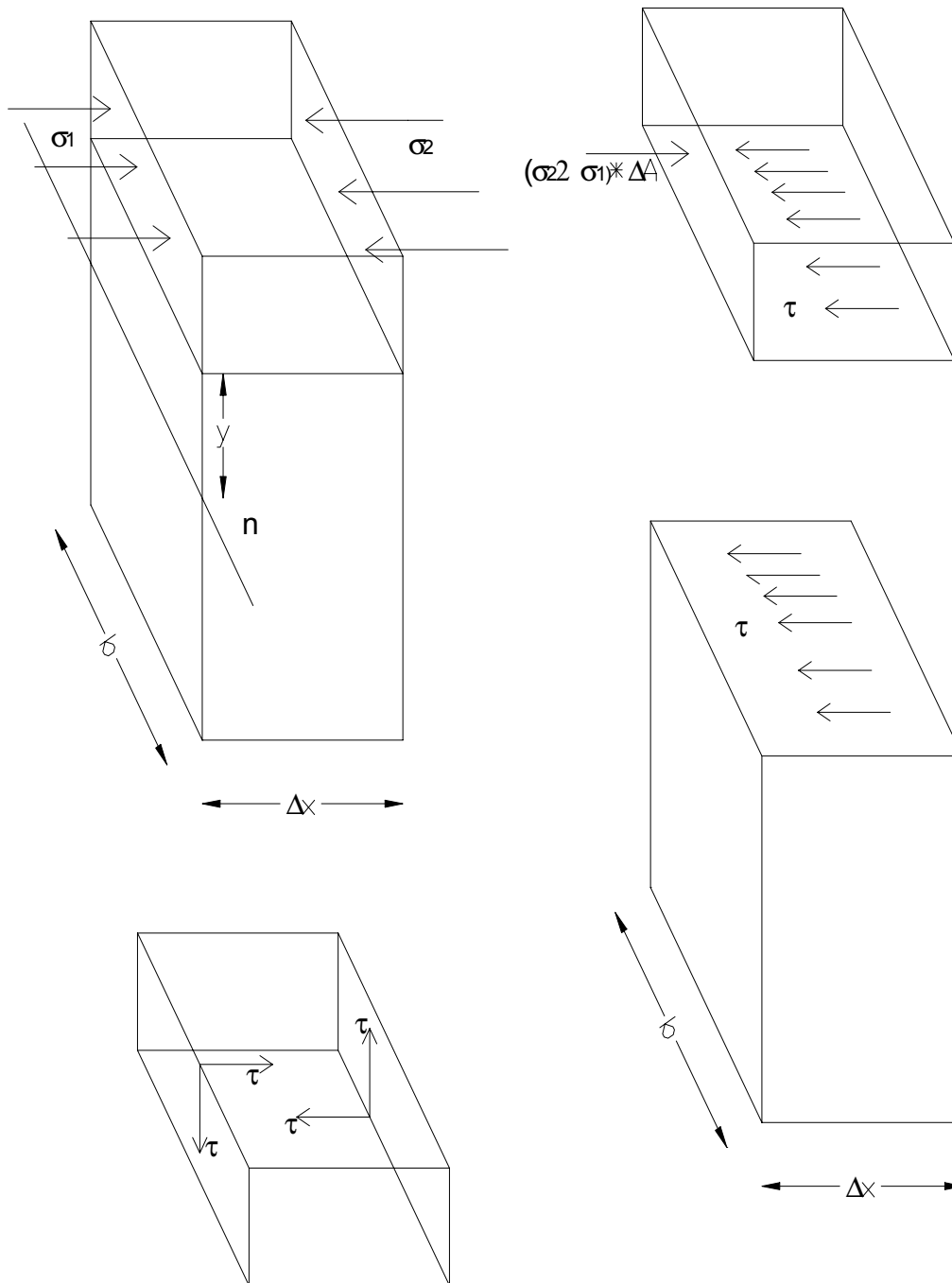
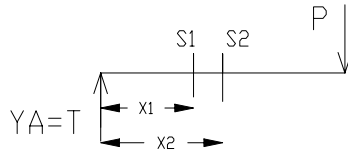
$$M1 = T * X1; \quad M2 = T * X2; \quad \text{ora facciamo la differenza : } M2 - M1$$

$$M2 - M1 = T * X2 - T * X1 = T (X2 - X1); \text{ ma } X2 - X1 = Dx, \text{ quindi } M2 - M1 = T * Dx$$

Il nostro tronchetto di trave per effetto della flessione sappiamo che si deforma e sulle due facce esterne ci saranno le tensioni σ che possiamo calcolare:

$$\text{nella sezione 1: } \sigma_1 = M1 * y / J$$

$$\text{nella sezione 2 : } \sigma_2 = M2 * y / J$$



Reciprocità delle τ

Un elementino del tronchetto quindi sarà sollecitato da una parte dalle tensioni σ_1 e dall'altra parte dalle tensioni $\sigma_2 > \sigma_1$; ovvero da una parte dalla forza risultante delle σ_1 , che vale $(\sigma_1 * \Delta A)$ e dall'altra parte dalla forza risultante delle σ_2 che vale $(\sigma_2 * \Delta A)$, più grande della prima. Quindi l'elementino sarà spinto verso sinistra dalla forza risultante $(\sigma_2 * \Delta A - \sigma_1 * \Delta A)$, Siccome l'elementino non si sposta né verso destra né verso sinistra, deve esserci un'altra forza uguale e contraria a $(\sigma_2 * \Delta A - \sigma_1 * \Delta A)$; questa nuova forza è la forza di scorrimento cioè la risultante delle tensioni tangenziali τ che nascono sotto l'elementino e che vale $(\tau * b * \Delta x)$.

Allora possiamo scrivere :

$$\sigma_1 * \Delta A = M1 * y * \Delta A / J$$

$$\sigma_2 * \Delta A = M2 * y * \Delta A / J$$

ma $(y * \Delta A)$ rappresenta il momento statico dell'areola ΔA rispetto all'asse neutro che indichiamo con S, quindi :

$$\sigma_1 * \Delta A = M1 * S / J$$

$$\sigma_2 * \Delta A = M2 * S / J$$

$$\sigma_2 * \Delta A - \sigma_1 * \Delta A = M2 * S / J - M1 * S / J$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1) * \Delta A = (M2 - M1) * S / J$$

$$\text{ed essendo } (M2 - M1) = T * \Delta x$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1) * \Delta A = T * \Delta x * S / J \quad \text{questa è la forza di scorrimento}$$

Per l'equilibrio dell'elementino abbiamo detto che deve essere

$$T * \Delta x * S / J = \tau * b * \Delta x \quad \text{e semplificando}$$

$$T * S / J = \tau * b$$

da cui si ricava

$$\tau = T * S / J * b$$

Questa è la formula per calcolare le tensioni tangenziali τ in una sezione sollecitata a flessione e taglio. Le tensioni così calcolate, vanno confrontate con quelle ammissibili per effettuare la verifica.

In questa formula T rappresenta il taglio nella sezione; S il momento statico della sezione rispetto all'asse baricentrico; J il momento d'inerzia baricentrico e b la corda ovvero la larghezza della sezione nel punto in cui vogliamo determinare le τ .

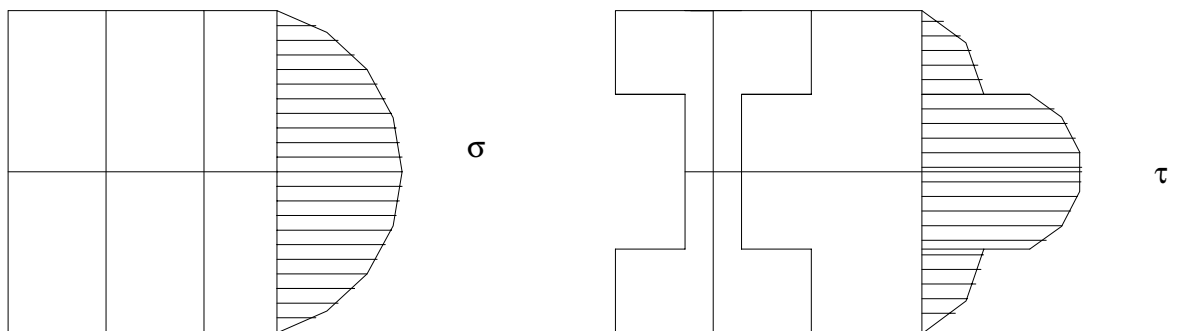
L'applicazione di questa formula è abbastanza laboriosa, in quanto occorre calcolare prima il momento d'inerzia baricentrico e poi il momento statico di ogni porzione di sezione, dove vogliamo conoscere il valore delle τ .

La stessa formula inoltre ci dice che **le τ hanno andamento parabolico**.

Nel caso della **sezione rettangolare**, di area A , essa si semplifica notevolmente e si scrive:

$$\tau = 3 * T / 2 * A$$

il diagramma delle τ per la sezione rettangolare è:

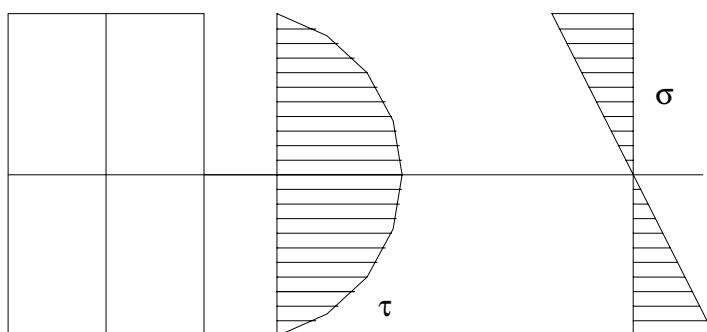


OSSERVAZIONE:

- Nel caso della **sezione a doppio T** guardando il diagramma delle τ si può dedurre che le τ sono massime sulla parte centrale (anima), mentre sono molto piccole sulle parti estreme (ali); quindi possiamo dire che il taglio nella sezione a doppio T è assorbito soprattutto dall'anima, potendo trascurare, a favore della sicurezza, il contributo delle ali. Cioè come se la sezione che lavora fosse solo l'anima. Ma questa infondo ha forma rettangolare, per cui si può applicare la formula della sezione rettangolare dove per A si prende l'area della sola anima.

OSSERVAZIONE:

- Se consideriamo una sezione rettangolare e disegniamo a fianco i diagrammi delle σ e τ osserviamo che le σ sono massime nelle parti estreme della sezione e trascurabili nella parte centrale; al contrario delle τ . Quindi le parti estreme lavorano a flessione e la parte centrale lavora a taglio. Per questo motivo è stata inventata la sezione a doppio T, in quanto il materiale è sfruttato al meglio, cioè si ha una trave che pesa di meno, ma che resiste praticamente allo stesso modo a flessione e taglio di quella rettangolare.-



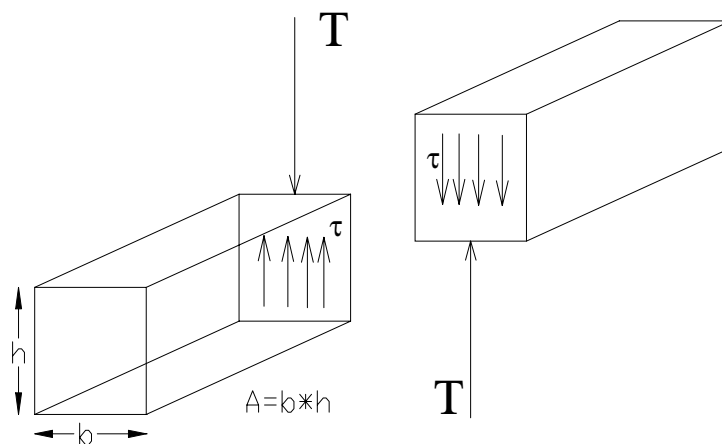
TAGLIO PURO

Il taglio puro ossia taglio senza flessione si ha nelle chiodature e nelle saldature delle lamiere d'acciaio che formano le travi, e nelle mensole molto corte. In questi casi siccome la lunghezza dell'elemento sollecitato è molto piccola, praticamente non ci sono sforzi di flessione, ma solo di taglio, che viene detto taglio puro. Il calcolo delle tensioni tangenziali τ si fa nell'ipotesi che le tensioni tangenziali τ si distribuiscano in maniera uniforme e costantemente sulle superfici tagliate, per cui possiamo dire che se A è l'area della sezione e T lo sforzo di taglio si avrà:

$$\tau = T / A$$

Per la verifica bisogna confrontare la τ calcolata con la τ_{amm} del materiale.

La formula di **progetto** è : $A = T / \tau_{amm}$



ESEMPIO:

Due lamiere d'acciaio dello spessore di mm 3 sono chiodate mediante tre bulloni passanti di diametro mm 12. Le lamiere sono sollecitate da uno sforzo di trazione $N = 2400 \text{ Kg}$; verificare le chiodature.

La forza N si ripartisce sui tre bulloni e ognuno assorbirà una forza pari a $N/3 = 2400/3 = 800 \text{ Kg}$
L'area di un bullone è : $\pi * R^2 = 3,14 * (1,2 / 2)^2 = 1,13 \text{ cm}^2$

$$\text{Verifica : } \tau = T / A = 800 \text{ Kg} / 1,13 \text{ cm}^2 = 700 \text{ Kg/cm}^2 < \tau_{amm}.$$

Se volessimo progettare la chiodatura applicando una forza N di 6000 Kg e mettendo quattro bulloni, avremmo:

Sforzo assorbito da un bullone: $N/4 = 6000/4 = 1500 \text{ Kg}$

Progetto dell'area di un bullone: $A = N/4 / \tau_{amm} = 1500 \text{ Kg} / 900 \text{ Kg/cm}^2 = 1,67 \text{ cm}^2$

Ogni bullone dovrebbe avere un'area di $1,67 \text{ cm}^2$ e quindi un diametro $D = \sqrt{4 \cdot A / \pi}$.

GLI EDIFICI IN MURATURA IN ZONA SISMICA

Gli edifici in muratura ordinaria nelle zone classificate “**Sismiche**” devono rispettare oltre le indicazioni del **D.M. 20/11/87** (valido per le costruzioni in muratura), anche il **D.M. 16/01/96** (riferito alle costruzioni in zona sismica).

L’edificio in muratura ordinaria è costituito dall’assemblaggio di elementi costruttivi verticali (**setti**) e orizzontali (**solai**).

I setti possono essere **portanti** (che sopportano i carichi verticali) e **di controvento** (che resistono alle forze orizzontali).

I solai hanno il compito di trasferire i carichi verticali e/o orizzontali ai muri sottostanti).

La distinzione fra muri portanti e muri di controvento è puramente convenzionale in quanto tutti i muri sono nello stesso tempo portanti e di controvento, a seconda della direzione del sisma.

Il sisma è schematizzabile con delle forze orizzontali proporzionali al peso dell’edificio che agiscono in due direzioni ortogonali non contemporaneamente (x-y) parallele ai solai e concentrate al loro livello. Se i solai sono abbastanza rigidi nel proprio piano (in teoria se hanno rigidezza infinita) trasmettono agli elementi verticali (muri di controvento) l’azione orizzontale, la quale si ripartisce fra i muri in proporzione alla loro rigidezza (funzione dello spessore) generando sollecitazioni di pressoflessione e taglio.

E’ per questo che l’edificio in muratura è bene che sia “**tozzo**”. Inoltre i solai affinché siano molto rigidi è necessario che siano in c.a. o in acciaio purchè siano bene ammortati nella muratura mediante cordoli o zanche (vedi corso di Tecnologia delle Costruzioni).

La normativa sulle zone sismiche impone tra l’altro: che l’altezza per gli edifici in muratura in zona con grado di sismicità $S=12$ non superi i **7,50 m**.

Inoltre la pianta dell’edificio deve essere il piu’ possibile **compatta e simmetrica**, ed in caso di forma rettangolare deve essere **$b/B \geq 1/3$** .

Lo spessore della muratura deve essere **$\geq 24 \text{ cm} + 20 \text{ cm}$** in **fondazione**.

Le **aperture** devono essere **allineate** lungo l’altezza.

La distanza fra i muri maestri deve essere **$\leq 7 \text{ m}$** .

La snellezza di ciascun setto murario deve essere **< 12** .

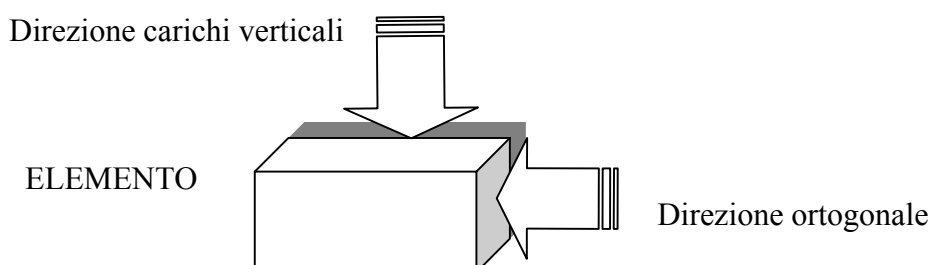
Il sovraccarico accidentale da considerare ai vari piani deve essere **$\leq 400 \text{ Kg/m}^2$**

DEFINIZIONI PREVISTE DALLA NORMATIVA:

RESISTENZA CARATTERISTICA A COMPRESSIONE DELL'ELEMENTO f_{bk} :

E' la resistenza a compressione dell'elemento(naturale o artificiale) costituente la muratura e deve essere determinato su campioni in laboratorio autorizzato.

- Non si possono impiegare elementi artificiali pieni con resistenza caratteristica $f_{bk} < 70 \text{ Kg/cm}^2$
- Non si possono impiegare elementi artificiali semipieni nella direzione dei carichi verticali con resistenza caratteristica $f_{bk} < 50 \text{ Kg/cm}^2$.
- Non si possono impiegare elementi artificiali semipieni nella direzione ortogonale ai carichi verticali con resistenza caratteristica $f_{bk} < 15 \text{ Kg/cm}^2$.



ELEMENTI	In Direzione Carichi Verticali	In Direzione Ortogonale
PIENI	70 Kg/cm ²	70 Kg/ cm ²
SEMIPIENI	50 Kg/ cm ²	15 Kg/ cm ²

RESISTENZA CARATTERISTICA A COMPRESSIONE DELLA MURATURA f_k :

E' la resistenza a compressione della muratura determinata in base a quella dell'elemento e del tipo di malta impiegata.

PER ESEMPIO:

Valore della Resistenza caratteristica della muratura f_k per elementi artificiali pieni e semipieni

Res. Caratt. Elem. $F_{bk} \text{ Kg/cm}^2$	Malta Tipo M1 $f_k = \text{Kg/ cm}^2$	Malta Tipo M2 $f_k = \text{Kg/ cm}^2$	Malta Tipo M3 $f_k = \text{Kg cm}^2$	Malta Tipo M4 $f_k = \text{Kg/ cm}^2$
50	35	34	33	30
75	50	45	41	35
100	62	53	47	41

TENSIONE BASE AMMISSIBILE DELLA MURATURA σ_{amm} :

E' la tensione ammissibile di calcolo funzione della resistenza caratteristica f_k :

$$\sigma_{amm} = f_k/5.$$

ESEMPIO: Muratura realizzata con elementi artificiali aventi $f_k = 75 \text{ Kg/cm}^2$ e malta tipo M1,
 f_k muratura = 50 Kg/cm^2 ; $\sigma_{amm} = 50/5 = 10 \text{ Kg/cm}^2$.

VERIFICA CON IL METODO SEMPLIFICATO IN ZONA SISMICA – S = 12

La verifica dell'edificio puo' essere effettuata in alternativa ai metodi piu' rigorosi mediante il cosiddetto "Metodo Semplificato" sotto determinate condizioni.

Questo metodo è stato introdotto dal **D.M. 20/11/87**; ma per la sua applicazione in zona sismica bisogna tenere presente altre prescrizioni secondo il **D.M. 16/1/96**.

1. L'edificio deve avere al massimo tre piani compreso l'interrato: **$N_p \leq 3$**
2. L'edificio sia inscritto in un rettangolo con esclusione di forme a C e a L e il rapporto fra lato minore e maggiore non inferiore ad un terzo: **$b/B \geq 1/3$**
3. La snellezza λ della muratura non sia in nessun caso superiore a 12:
 $\lambda = h/t \leq 12$ (h = altezza del setto; t = spessore del setto).
4. L'area della sezione di muratura resistente alle azioni orizzontali espressa come percentuale della superficie totale dell'edificio e valutata a netto delle aperture non deve essere inferiore, per ciascun piano di verifica e nelle due direzioni principali escluse le parti aggettanti, ai valori di cui alla tabella :

Area resistente ai vari piani (%) Zone con S=12			
	PIANO 1	PIANO 2	PIANO 3
Edificio a 1 piano	6	-	-
Edificio a 2 piani	6	6	-
Edificio a 3 piani	7	6	6

Non sono da prendere in considerazione, ai fini della percentuale di muratura resistente, i muri di larghezza inferiore a cm 50 al netto delle aperture.

5. Deve inoltre risultare per ciascun piano di verifica:

$$\sigma_{max} = N/(0,50 \times A) < \sigma_{amm}$$

Tale verifica si effettua di regola per i muri del piano piu' basso, a meno che lo spessore non vari o che le aperture non siano allineate. In tale casi occorre ripetere la verifica per gli altri piani.

Qualora non tutte le precedenti prescrizioni non siano verificate, si dovrà procedere con la verifica estesa.

ESEMPIO DI CALCOLO EDIFICIO COL METODO SEMPLIFICATO

Eseguiamo a titolo di esercitazione il calcolo di un edificio a due piani fuori terra realizzato con muratura di mattoni pieni e malta cementizia **M1**.

Da prove di laboratorio effettuate su campioni di mattoni pieni risulta **fbk= 75 Kg/cm²**
Pertanto dalle **tabelle** troviamo **fk= 50 Kg/cm²**,

quindi sarà $\sigma_{amm} = fk/5 = 50/5 = 10 \text{ Kg/cm}^2$.

Si verificano di seguito i vari punti previsti dalla normativa:

1. Numero dei piani $N_p = 2 < 3$
2. $B = 8,20 \text{ m}$; $b = 6,00 \text{ m}$; $B/b = 8,20/6,00 = 1,36 < 3$
3. $\lambda_t = H/t = 350/50 = 7 < 12$. - $\lambda_1 = H/1 = 300/40 = 7,5 < 12$

4.

PIANO PRIMO		
SETTO	DIMENSIONE (m)	AREA (Mq)
1	5.05x0.40	2.02
2	2.35x0.40	0.94
3	1.90x0.40	0.76
4	3.10x0.40	1.20
5	1.20x0.40	0.48
TOTALE DIREZIONE X		5.40
6	5.20x0.40	2.08
7	1.53x0.40	0.612
8	3.07x0.40	1.228
9	5.60x0.40	2.24
TOTALE DIREZIONE Y		6.16

AREA TOTALE PIANO PRIMO: $8,20 \times 6,00 = 49,20 \text{ Mq}$

In funzione del numero dei piani, due, dalla tabella ricaviamo che al piano primo la percentuale non deve essere inferiore al 6%.

La percentuale risulta:

Lungo l'asse **X** : $5,40 \times 100 / 49,20 = 10,9 \% > 6 \%$

Lungo l'asse **Y** : $6,16 \times 100 / 49,20 = 12,5 \% > 6 \%$

PIANO TERRA		
SETTO	DIMENSIONE (m)	AREA (Mq)
1	5.00x0.50	2.50
2	2.20x0.50	1.10
3	1.90x0.50	0.95
4	3.10x0.50	1.55
5	1.20x0.50	0.60
TOTALE DIREZIONE X		6.70
6	5.00x0.50	2.50
7	1.43x0.50	0.715
8	3.07x0.50	1.535
9	5.50x0.50	2.75
TOTALE DIREZIONE Y		7.50

AREA TOTALE PIANO TERRA: $8,20 \times 6,00 = 49,20$ Mq

In funzione del numero dei piani (due) dalla tabella ricaviamo che al piano terra la percentuale non deve essere inferiore al 6%.

La percentuale risulta:

Lungo l'asse **X** : $6.70 \times 100 / 49,20 = 13,6 \% > 6 \%$

Lungo l'asse **Y** : $7.50 \times 100 / 49,20 = 15,2 \% > 6 \%$

5.

ANALISI DEI CARICHI

PIANO PRIMO:

Peso proprio muri: $(5.4+6.16) \times 3 \times 1800 = \dots\dots\dots 62424$ Kg

Peso cordoli:

$(5.05+2.35+8.2+5.2+2 \times 5.6) \times 0,20 \times 0,40 \times 2500 = \dots\dots\dots 6400$ Kg

Peso solai: $((4.65 \times 5.20) + (2.35 \times 5.40)) \times 600 = \dots\dots\dots 22122$ Kg

Totale Peso Piano Primo.....90946 Kg

$$\sigma_{\max} = N/0.50 \times A = 90946/0.50 \times 115600 = 1.57 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_{\text{amm}} (10 \text{ Kg/cm}^2)$$

Il Piano Primo risulta Verificato.

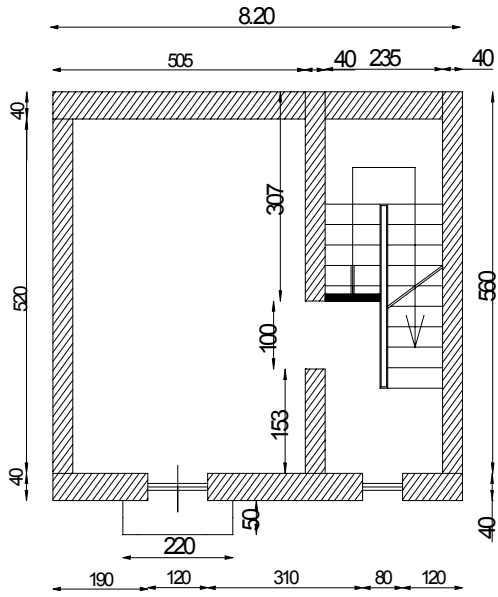
PIANO TERRA:

Peso trasmesso dal piano primo:.....	90946 Kg
Peso proprio muri: $(6.7+7.5) \times 3.50 \times 1800 =$	89460 Kg
Peso cordoli: $(5.00+2.20+8.20+5.00+2 \times 5.50) \times 0.20 \times 0.50 \times 2500 =$	7850 Kg
Peso solai : $4.50 \times 5.00 \times 600 =$	15000 Kg
Peso scala: $2.20 \times 5.50 \times 1000 =$	12100 Kg
Peso balconi: $2.20 \times 0.50 \times 800 =$	880 Kg
Totale Peso Piano Terra.....	214736 Kg

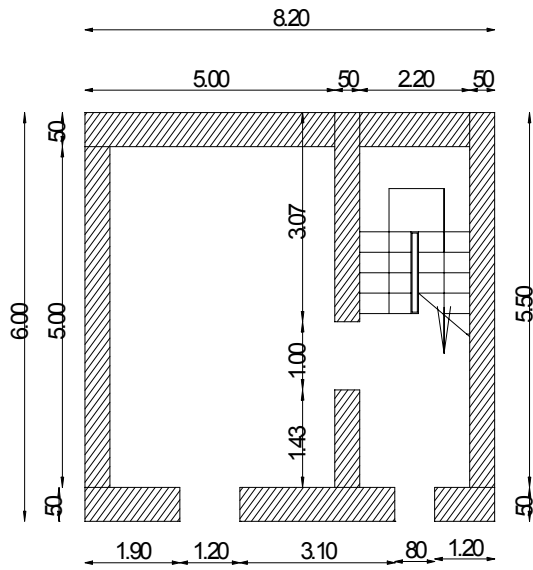
$$\sigma_{\max} = N / 0.50 A = 214736 / 0.50 \times 142000 = 3.02 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_{\text{amm}} (10 \text{ Kg/cm}^2).$$

Il Piano Terra risulta Verificato.

PIANTA PIANO PRIMO SCALA 1:100



PIANTA PIANO TERRA SCALA 1:100



DISPENSA N° 7

IL CEMENTO ARMATO

Il cemento armato è costituito dall'unione di due materiali: il calcestruzzo e l'acciaio; il calcestruzzo è un impasto formato da cemento, ghiaia, sabbia e acqua. Le proporzioni per mc di impasto potrebbero essere: ghiaia 0,800 mc ; sabbia 0,400 mc; (la ghiaia avendo dimensioni più grandi della sabbia, crea degli interspazi in cui si introducono i granelli di sabbia) ; acqua 100 litri; polvere di cemento 300 Kg.

Si chiama cemento armato, ma sarebbe più esatto chiamarlo calcestruzzo armato. Poi ci sono le armature d'acciaio; aggiungendo nell'interno dell'impasto, in posizione opportuna, un'armatura d'acciaio, si migliora notevolmente la resistenza a trazione.

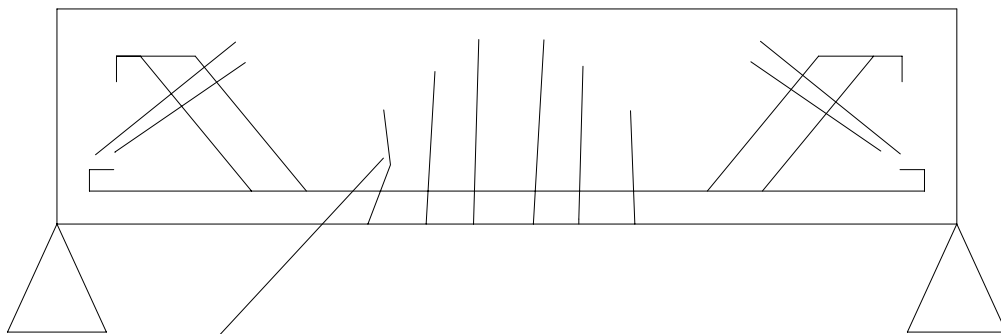
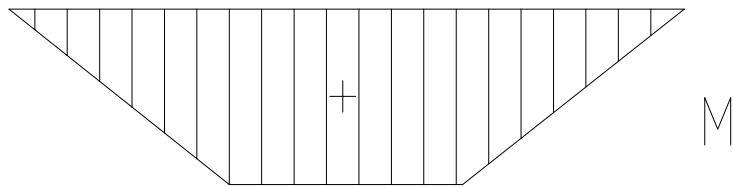
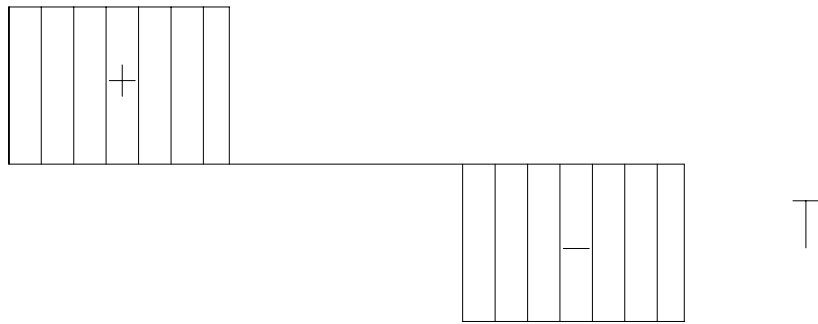
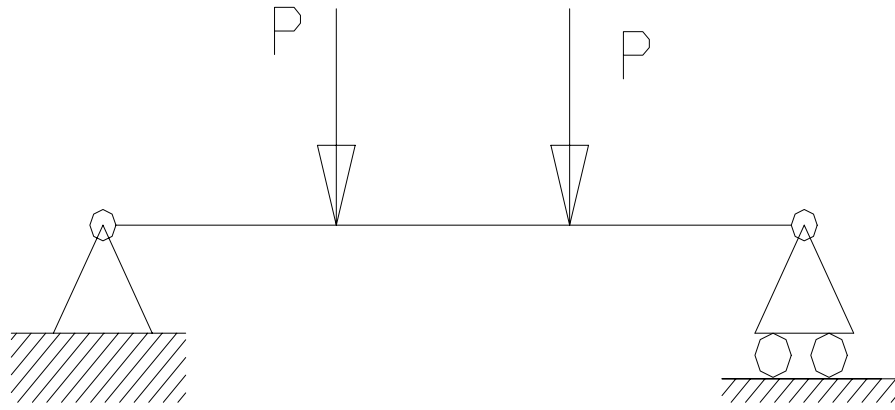
Una volta effettuato il getto nelle casseforme, si attende un certo periodo (28 giorni, ma anche meno) e si riscontra che il tutto è diventato un insieme monolitico.

E' naturale disporre l'acciaio nelle zone tese della struttura. Se per esempio si ha una trave appoggiata, il massimo quantitativo d'acciaio va messo in mezzeria, dove il momento è massimo, e nella parte bassa della trave; a mano a mano che si avvicina agli appoggi, la quantità di acciaio può diminuire.

Un requisito essenziale che deve avere il cemento armato è la ottima aderenza tra acciaio e calcestruzzo: infatti, se il ferro scorresse rispetto al calcestruzzo il comportamento sarebbe anomalo. Ci sono anzi dei ferri che presentano una superficie rugosa e sono detti ferri ad aderenza migliorata. In realtà la perfetta aderenza avviene in quanto i coefficienti di dilatazione termica dei due materiali sono perfettamente uguali.

La fortuna del cemento armato è dovuta al fatto che il ferro ha un coefficiente di dilatazione termica uguale a quello del calcestruzzo. Infatti i due materiali sottoposti alla stessa variazione di temperatura si dilatano o si restringono allo stesso modo. Se così non fosse e per esempio il ferro avesse un coefficiente di dilatazione termica maggiore del calcestruzzo; quando la temperatura sale il ferro si dilata di più del calcestruzzo per cui lo rompe, mentre nel caso contrario, il calcestruzzo si dilaterrebbe di più del ferro il quale scorrerebbe dentro il foro di calcestruzzo.

Immaginiamo di avere una trave appoggiata con due carichi concentrati come in figura, si avranno i diagrammi del taglio e del momento flettente. I diagrammi ci dicono in quale la trave è soggetta a taglio (in questo caso alle estremità) e come varia il momento flettente lungo la trave (in questo caso è massimo in mezzeria e va diminuendo verso gli appoggi).



Fessurazioni

Durante il carico la trave si deforma facendo la pancia in giù e compaiono delle lesioni (non sempre visibili ad occhio nudo). Queste lesioni sono concentrate in mezzzeria ed hanno andamento quasi verticale e tendono a scomparire andando dal basso verso l'alto; andando verso gli appoggi dove il taglio è maggiore le lesioni tendono a disporsi a 45° , in quelle zone i ferri vengono disposti anch'essi a 45° per contrastare l'apertura di quelle lesioni.

Se ipotizziamo di aumentare il carico pian piano, le lesioni aumenteranno di ampiezza e di lunghezza, ciò vuol dire che la trazione nella parte inferiore della trave generata dal momento flettente fa rompere il calcestruzzo il quale non resiste a sforzi di trazione. Questi sforzi di trazione sono assorbiti invece dalle barre di ferro.

Se il carico non aumenta più la deformazione si ferma e se togliamo il carico la trave ritorna nella forma originaria (**siamo ancora nel campo elastico**) anche se il calcestruzzo ormai è fessurato e le fessure non si rimargineranno più.

Se il carico invece dovesse continuare, la trazione nella parte inferiore della trave continua ad essere assorbita solo dal ferro che ad un certo punto si snerva e continua ad allungarsi fino a spezzarsi, provocando la rottura della trave.

Pertanto quando in una trave in c.a. compaiono delle lesioni visibili ad occhio nudo, questo è un campanello d'allarme, il quale segnala che il ferro si sta snervando per cui bisogna diminuire il carico per evitare il cedimento della trave. Diceva un mio professore universitario: "Il cemento armato è *galantuomo* in quanto avverte sempre prima di rompersi mediante la comparsa delle lesioni". Attenzione però a non usare mai, per l'armatura interna, acciaio ad alto limite elastico (molto resistente, duro, non dolce) in quanto questo tipo di acciaio non si snerva, ma si spezza istantaneamente quando raggiunge la massima tensione sopportabile per cui viene a mancare il campanello d'allarme in quanto non si vedranno delle lesioni nella trave. Nei calcoli statici si considera la trave quando è ancora nel campo elastico (in quanto non ci interessa più una trave che rimane per sempre deformata anche quando si toglie il carico) questo equivale a dire che è valida la legge di **Hooke**.

Le quattro ipotesi fondamentali del cemento armato sono:

1. *Conservazione delle sezioni piane durante la flessione*
2. *Comportamento elastico (validità della legge di Hooke)*
3. *Perfetta aderenza fra acciaio e calcestruzzo, che equivale a dire $\varepsilon_a = \varepsilon_b$*
4. *Considerare il calcestruzzo teso già fessurato sin dall'inizio.*

-La prima ipotesi è tipica della teoria della trave (Bernoulli).

-La seconda ipotesi è verificata in quanto si ferma il carico prima che avvenga lo snervamento dell'acciaio.

-La terza ipotesi è verificata per quanto sopra detto sulla uguaglianza dei coefficienti di dilatazione dei due materiali, il che comporta l'uguaglianza dei coefficienti di allungamento unitario $\varepsilon_a = \varepsilon_b$

-La quarta ipotesi è a favore della sicurezza in quanto se trascuriamo il contributo del calcestruzzo, che inizialmente è intero, siamo più sicuri perché in realtà un minimo contributo lo dà, anche se inizialmente, prima di fessurarsi

Se consideriamo quindi una sezione rettangolare di c.a. possiamo dire che la parte di calcestruzzo che sta sotto dell'asse neutro non esiste ai fini del calcolo. La sezione è formata dalla parte di calcestruzzo sopra l'asse neutro e dalle barre d'acciaio sotto l'asse neutro.

In virtù della seconda ipotesi sul c.a. possiamo scrivere che è valida la legge di Hooke sia per l'acciaio: $\sigma_a = E_a \times \epsilon_a$; che per il calcestruzzo: $\sigma_b = E_b \times \epsilon_b$

Se facciamo il rapporto σ_a / σ_b avremo :

$$\sigma_a / \sigma_b = E_a \times \epsilon_a / E_b \times \epsilon_b$$

Inoltre è $\epsilon_a = \epsilon_b$ per la terza ipotesi

$E_a = 2.100.00 \text{ Kg/cm}^2$, mentre $E_b = 210.000 \text{ Kg/cm}^2$ per cui il rapporto $E_a/E_b = 10$

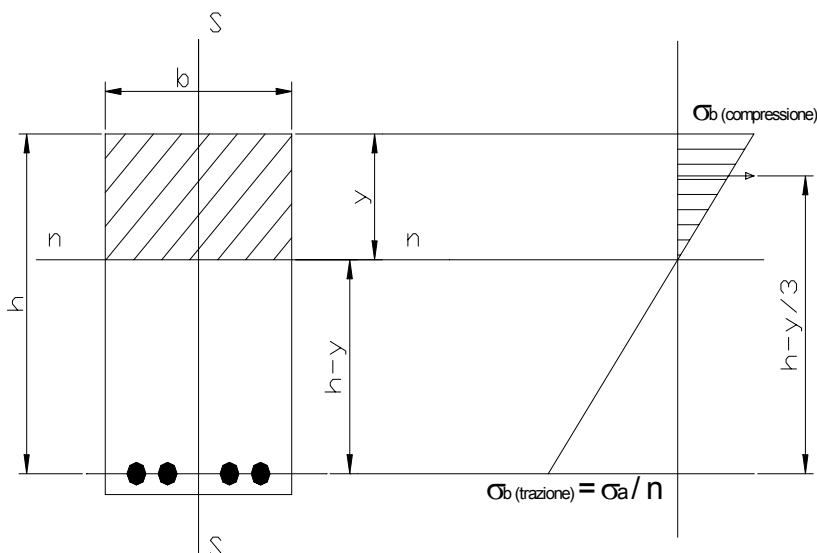
Quindi avremo : $\sigma_a / \sigma_b = n = 10$ (oggi la normativa impone di assumere $n = 15$)

In altre parole vuol dire che $\sigma_a = 15$ volte σ_b ($\sigma_a = n \sigma_b$)

Ciò vuol dire che l'acciaio resiste 15 volte più del calcestruzzo, ovvero che per reggere lo stesso sforzo occorre un'area A_a o un'area $A_b = n A_a$.

FLESSIONE SEMPLICE RETTA – *Sezione rettangolare – Armatura semplice*

Consideriamo una sezione rettangolare in c.a. per esempio la sezione di mezzera della trave di cui alla figura precedente. Essa sarà sollecitata a flessione semplice dal momento flettente M . L'armatura d'acciaio è disposta in basso (dove sono le fibre tese) e ci sono per esempio 4 tondini di ferro aventi un'area A_a .



Possiamo disegnare il diagramma delle tensioni σ che sappiamo dalla teoria di Bernoulli essere triangolare intrecciato. Per quanto riguarda la posizione dell'asse neutro non possiamo più dire che è baricentrico della sezione rettangolare, in quanto la parte di calcestruzzo sotto l'asse neutro come se non esistesse, ci sono solo le armature di ferro. L'asse neutro è baricentrico quando la sezione è omogenea (cioè tutta acciaio o tutta calcestruzzo resistente). Quindi la posizione dell'asse neutro sarà baricentrico della sezione che lavora che chiamiamo **sezione ideale reagente** costituita dal calcestruzzo compresso (sopra) e dall'acciaio teso (sotto).

La prima cosa da fare è ricercare la posizione dell'asse neutro. Per fare ciò basta ricordare dalla geometria delle masse che **il momento statico di una sezione fatto rispetto all'asse baricentrico è nullo.**

Ora nel nostro caso la sezione è la sezione ideale reagente (calcestruzzo compresso e ferro teso), l'asse neutro deve essere baricentrico di questa sezione, per cui occorre scrivere che il momento statico della sezione ideale reagente fatto rispetto all'asse neutro è nullo.

$$S_n = + (b * y) * y/2 - n A_a * (h - y) = 0$$

($n A_a$ rappresenta un'area ideale di calcestruzzo concentrata nel baricentro di A_a)

Si ottiene una equazione di secondo grado in y che risolta da :

$$y = n A_a / b * (-1 + \sqrt{1 + 2 * h * b / n A_a}) \text{ Posizione dell'asse neutro}$$

Una volta trovata la posizione dell'asse neutro si può applicare alla sezione di c.a. la formula di Bernoulli – Navier per la flessione semplice retta : $\sigma = M * y / J$

Per il calcestruzzo:

$$\sigma'_b = M * y / J_{id} \leq \sigma'_{b \text{ amm.}}$$

Per l'acciaio: essendo $\sigma_a = n \sigma_b$,

$$\sigma_a = n * M * (h - y) / J_{id} \leq \sigma_{a \text{ amm.}}$$

Queste due sono le formule di verifica per la flessione semplice retta.

Dove $J_{id} = b * y^3 / 3 + n A_a (h-y)^2$

Se si vuole evitare di calcolare il J_{id} si possono ricavare altre due espressioni per le formule di verifica.

Si scrive prima l'equilibrio alla rotazione della sezione attorno al baricentro del ferro teso:

$M = \frac{1}{2} * \sigma'_b * b * y * (h - y/3)$ da cui si ricava :

$$\sigma'_b = 2M / b * y * (h - y/3) \leq \sigma'_{b \text{ amm.}}$$

Poi si fa l'equilibrio alla rotazione della sezione attorno alla risultante delle σ_b

$M = \sigma_a * A_a (h - y/3)$ da cui si ricava :

$$\sigma_a = M / A_a (h - y/3) \leq \sigma_{a \text{ amm.}}$$

(Formule di verifica per la flessione semplice retta, in alternativa alle prime.)

IL TAGLIO NELLE TRAVI IN C.A.

Quando la trave in c.a. è sollecitata anche a taglio, si vengono a creare delle lesioni inclinate di 45° disposte vicino agli appoggi. Ciò è dovuto al fatto che le fibre compresse scorrono rispetto a quelle compresse in senso longitudinale.

Per "cucire" queste fibre le une alle altre occorre mettere delle armature trasversali. Queste sono le **staffe** ed i **piegati**.

Le staffe sono ferri di piccolo diametro che hanno anche la funzione di mantenere i ferri longitudinali durante il getto del calcestruzzo nella cassaforma.

I ferri piegati o "sagomati" in genere sono gli stessi che servono per la flessione, ma nelle zone vicino agli appoggi dove il momento diminuisce, non servono, allora vengono piegati a 45° così assorbono il taglio.

Bisogna innanzi tutto calcolare la tensione massima di taglio nel calcestruzzo

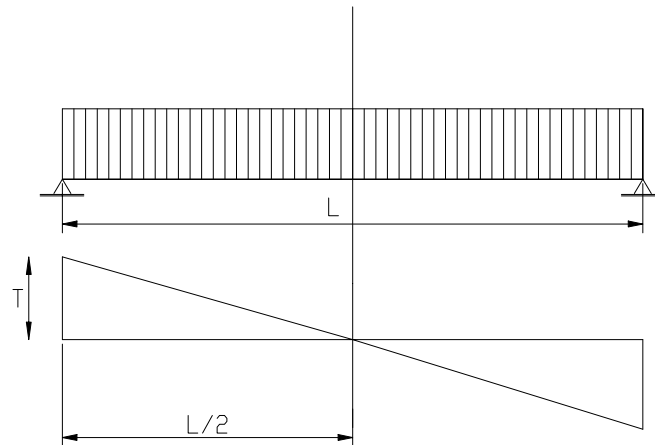
$$\tau_{\max} = T / b * 0,9 * h$$

Se $\tau_{\max} < \tau_{b0}$ non è necessario progettare le armature a taglio (Staffe e piegati), ma si disporranno solo le armature indispensabili previste dalla normativa.

Se $\tau_{b0} < \tau_{\max} < \tau_{b1}$ è necessario progettare le armature a taglio.

Se $\tau_{\max} > \tau_{b1}$ bisogna ingrandire la sezione di calcestruzzo.

Calcolo dell'armatura a taglio (trave appoggiata con carico uniformemente distribuito):



Innanzitutto bisogna calcolare la forza totale di scorrimento Ω (cioè la forza che fa scorrere le fibre tese rispetto a quelle compresse).

$$\Omega = T * L/2 \quad (\text{area del diagramma del taglio di mezza trave})$$

La normativa italiana sul c.a. impone che almeno il 40% della forza di scorrimento deve essere assorbita dalle staffe.

In genere si fa assorbire il 40% di Ω alle staffe ed il restante 60% ai piegati.

Staffe:

$$N_s * A_s = 0,40 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a$$

Questa equazione permette di ricavare il numero delle staffe N_s avendo l'area delle stesse A_s ovvero di calcolare l'area delle staffe A_s avendo fissato il numero delle stesse N_s :

$$N_s = 0,40 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a * A_s$$

$$A_s = 0,40 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a * N_s$$

Le staffe devono avere un diametro compreso fra 5 e 12 mm. Bisogna comunque mettere almeno 3 staffe ogni metro di trave con un minimo di 3 cm² /ml.

La distanza esatta si può trovare con un metodo grafico, ma in ogni caso la distanza fra le staffe (passo) non deve essere inferiore a 0,8 h .

Le staffe si dispongono ravvicinate agli appoggi dove è massimo il taglio e più distanti verso la mezzera dove il taglio tende a zero.

Piegati:

$$N_p * A_p = 0,60 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a * \sqrt{2}$$

Questa equazione permette di ricavare il numero dei piegati N_p avendo l'area degli stessi A_p ovvero di calcolare l'area dei piegati A_p avendo fissato il numero degli stessi N_p :

$$N_p = 0,60 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a * \sqrt{2} * A_p$$

$$A_p = 0,60 * \Omega / 0,9 * h * \sigma_a * \sqrt{2} * N_p$$

In ogni caso, anche se dal calcolo non risultano necessarie, nelle travi sollecitate a flessione e taglio bisogna mettere almeno le armature (ferri diritti, piegati e staffe) previste dal Regolamento.

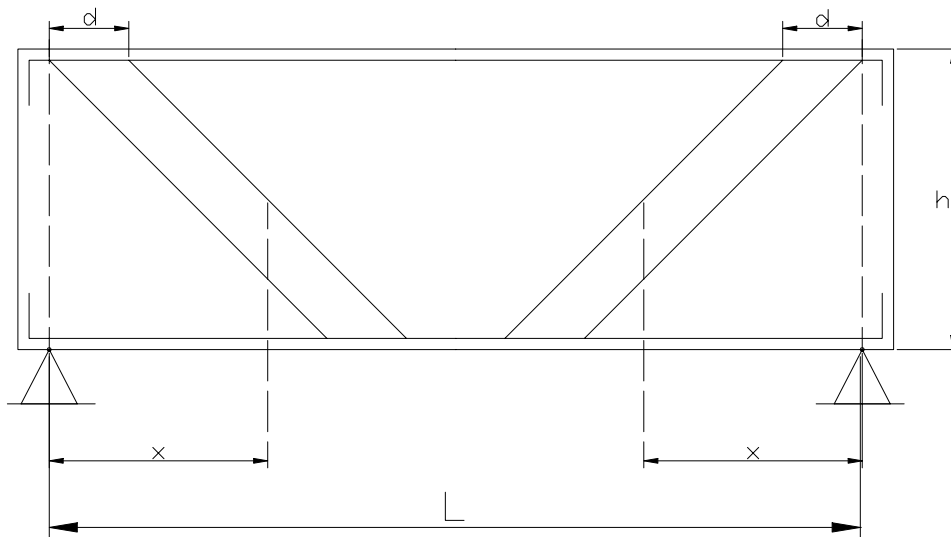
REGOLE PRATICHE PER LA PIEGATURA DEI FERRI

Premesso che la piegatura dei ferri andrebbe fatta secondo una costruzione grafica, sovrapponendo il diagramma dei momenti resistenti ($M_r = \sigma_a * W$) a gradoni su quello parabolico del momento flettente.

Una regola pratica per la piegatura dei ferri per travi ordinarie è la seguente:

-Travi sem incastrate $X = 1/5 L$; $d = (1/5 L - h/2)$

-Travi appoggiate $X = 1/6 L$; $d = (1/6 L - h/2)$



Detta regola, qualora il 30% circa dell'armatura inferiore venga prolungata verso l'appoggio assicura di solito la copertura del diagramma dei momenti resistenti.

-Per travi molto alte e corte è tecnicamente consigliabile disporre i ferri sagomati con piegatura rispetto all'orizzontale $\alpha = 60^\circ$; mentre per travi molto basse e lunghe con $\alpha = 30^\circ$.-

I PILSTRI – Compressione semplice

Calcolo di verifica:

Consideriamo un pilastro a sezione rettangolare di area $A_b = b \times h$, armato con tondino d'acciaio di area A_a ;

Se sottoponiamo il pilastro ad uno sforzo normale centrato N , questo sarà assorbito in parte dal calcestruzzo ed in parte dal ferro.

Lo sforzo assorbito dal calcestruzzo sarà : $N_b = A_b * \sigma_b$

Lo sforzo assorbito dall'acciaio sarà: $N_a = A_a * \sigma_a$

Lo sforzo Totale N sarà la somma dei due:

$$N = N_b + N_a = A_b * \sigma_b + A_a * \sigma_a$$

Ma essendo $\sigma_a = n \sigma_b$; si avrà :

$$N = A_b * \sigma_b + A_a * n \sigma_b ; \quad N = \sigma_b (A_b + n A_a) \text{ da cui si ricava}$$

$$\sigma_b = N / (A_b + n A_a) ; \quad \text{ponendo } (A_b + n A_a) = A_{id} \text{ si avrà :}$$

$$\sigma_b = N / A_{id} < \sigma_{bamm} \quad \sigma_a = n \sigma_b < \sigma_{aamm}$$

Formule di verifica alla compressione semplice.

Calcolo di progetto :

Si esegue per tentativi.

In un primo momento si trascura il peso proprio del pilastro per cui per sopportare lo sforzo N occorrerebbe un'area di calcestruzzo : $A_b = N / \sigma_{bamm}$

Secondo le norme tecniche nei pilastri, l'armatura longitudinale non deve essere inferiore a $A_a = 0,008 * A_b$ per cui si assume tale armatura.

Si effettua la verifica :

$$\sigma_b = N / A_{id} < \sigma_{bamm}$$

se la verifica non è soddisfatta si aumenta A_b e si ripete la verifica.

Si effettua la verifica dell'acciaio : $\sigma_a = n \sigma_b < \sigma_{aamm}$ se la verifica non è soddisfatta si aumenta A_a e si ripete la verifica.-

In ogni caso per l'armatura occorre rispettare la normativa :

- $A_a \geq 0,008 * A_b$ (A_b è l'area strettamente necessaria di calcestruzzo per sopportare lo sforzo di compressione).
- $0,003 * A_{b \text{ effettiva}} \geq A_a \leq 0,006 * A_{b \text{ effettiva}}$
- Il diametro delle barre longitudinali deve essere minimo 14 mm
- Le staffe devono avere diametro $\geq \frac{1}{4}$ massimo diametro longitudinale e comunque almeno di 6 mm
- Il passo delle staffe deve essere $p \geq 15$ volte il diametro dei ferri longitudinali e comunque ≤ 25 cm.

Carico di punta

Quando la snellezza del pilastro $\lambda = l_0 / \rho_{\min} > 50$ il pilastro si intende soggetto a carico di punta e va fatta la verifica con il **metodo ω** .

Si calcola prima il raggio d'inerzia minimo $\rho_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A_{id}}$; dove

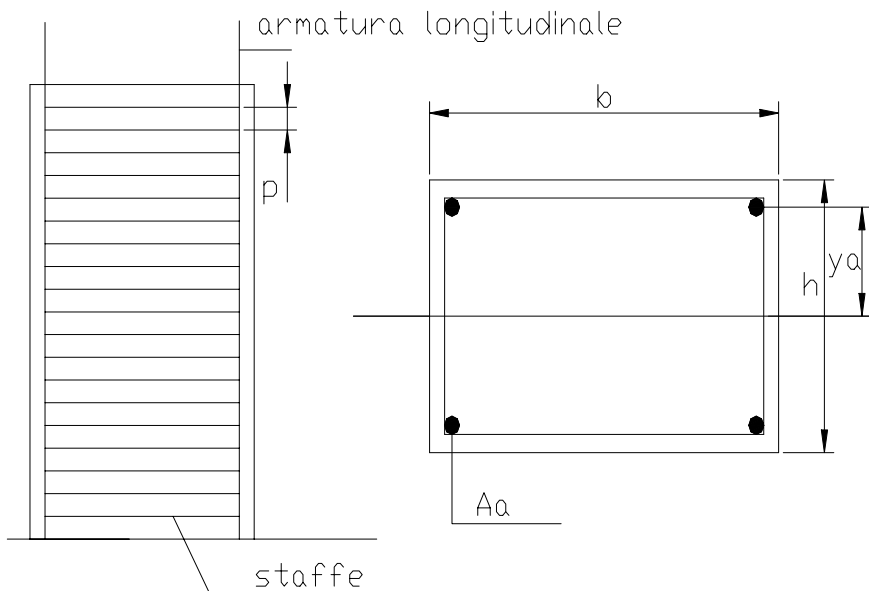
$$J_{\min} \text{ (momento d'inerzia minimo della sezione omogeneizzata)} = b \cdot h^3 / 12 + n A_a \cdot y_a^2$$

Se risulta $\lambda > 50$, si effettua la verifica con la formula:

$$\sigma_b = \omega * N / A_{id} < \sigma_{bamm}$$

Il coefficiente ω si ricava dalla tabella :

λ	ω
50	1.00
70	1.08
85	1.32
100	1.62
120	2.28
140	3.00



TENSIONI AMMISSIBILI PER CLS E ACCIAIO NEL CEMENTO ARMATO

La **Normativa Italiana sul c.a.** impone, di norma, l'utilizzo di tre classi di calcestruzzo ($R_{bk} = 250 ; 300 ; 350$) e due tipi di acciaio : FeB38K e FeB44K (ad aderenza migliorata). Il valore di R_{bk} (resistenza caratteristica) si determina con le modalità illustrate nel corso di Tecnologia delle Costruzioni.

- Nelle travi sollecitate a flessione, per il calcestruzzo compresso si dovrà assumere una tensione ammissibile: $\sigma^*_{bamm} = 60 + (R_{bk} - 150) / 4$
- Nei pilastri (con spessore $s > 25$ cm) si può assumere : $\sigma_{bamm} = 0,7 \times \sigma^*_{bamm}$
- Per le travi sollecitate anche a Taglio, si calcola prima :

$$\tau_{b0} = 4 + (R_{bk} - 150) / 75$$

$$\tau_{b1} = 14 + (R_{bk} - 150) / 35$$

Per L'acciaio si assumono le seguenti tensioni ammissibili:

1. Acciaio in barre tonde lisce

FeB22K..... $\sigma_{aamm} = 1200 \text{ Kg/cm}^2$

FeB32K..... $\sigma_{aamm} = 1600 \text{ Kg/cm}^2$

2. Acciaio ad aderenza migliorata

FeB38K..... $\sigma_{aamm} = 2200 \text{ Kg/cm}^2$

FeB44K..... $\sigma_{aamm} = 2600 \text{ Kg/cm}^2$

Con gli acciai ad aderenza migliorata si deve impiegare calcestruzzo avente $R_{bk} \geq 250$. In zona sismica è preferibile l'impiego di acciaio FeB44K il quale è più **duttile**. La duttilità è la capacità a disperdere energia. In caso di evento sismico è indispensabile che l'edificio perda l'energia elastica accumulata ad opera della scossa tellurica per cui se la struttura in c.a. è bene progettata (quindi anche se è abbastanza duttile), resiste meglio. Si può anche aumentare la duttilità del c.a. compresso, per esempio dei pilastri, "contenendo" il cls con staffe di contenimento. Bisogna ricordare che è perfettamente inutile eseguire calcolo di una struttura in maniera rigorosa applicando teorie sofisticate e modelli matematici complessi se poi in pratica non vengono rispettate le previsioni progettuali.

Occorre infatti, durante la fase esecutiva, porre molta attenzione ai particolari costruttivi ed alla messa in opera dei ferri. I nodi (collegamenti fra pilastri e travi) sono i punti più critici. Difatti esaminando edifici danneggiati dal sisma si è visto come essi hanno subito danni proprio perché i nodi non erano stati curati bene in fase esecutiva.

Dunque occorre eseguire le armature metalliche con cura e secondo gli schemi ed i particolari consigliati e riportati nelle letterature specializzate.

Comunque la progettazione degli edifici in c.a. in zona sismica richiede la conoscenza di molte altre teorie e discipline, non certo disponibili dal geometra. Queste poche nozioni illustrate dal docente sul c.a. hanno il solo scopo di fornire all'allievo geometra gli strumenti adatti ad affrontare piccole progettazioni solo dal punto di vista didattico. E comunque sempre uno studio più approfondito e l'esperienza siano precedenti ad una reale progettazione.

Il docente, che ha ormai esperienza ventennale nella professione ed in particolare nella progettazione ed esecuzione di strutture in c.a., consiglia l'allievo, futuro geometra, il quale se è pur vero può progettare piccoli edifici, di modesta entità, che contengano semplici elementi in c.a., (tutt'oggi in vero non'è ancora chiaro il limite di competenza), anche quando si sente sicuro di potere operare col c.a. di chiedere sempre consigli ad un ingegnere, unico specialista nel settore; perché anche le semplici strutture possono nascondere piccoli problemi di calcolo e/o di esecuzione che se sottovalutati possono manifestarsi con imprevedibili fenomeni anche a rischio dell'incolumità delle persone.

Il docente

Ing. Vincenzo Sorridente