CEMENTO ARMATO
APPLICAZIONI SULLA FLESSIONE RETTA SEMPLICE

Le possibili configurazioni deformate che si hanno nella flessione (semplice o composta) sono comprese nei campi di rottura **2, 3 , 4** , che sono individuati dalla posizione dell'asse neutro e, in modo analogo, dal rapporto **k = x/d** [fig. 1].
x = distanza asse neutro dal bordo compresso della sezione.
d = distanza tra l'asse delle armature tese e il bordo compresso della trave, (h – d′).

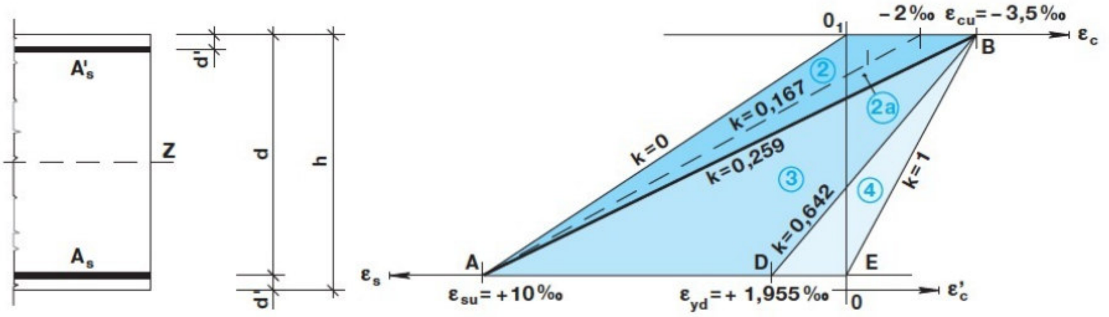


Fig. 1

Le caratteristiche di questi campi sono:

CAMPO 2:

- □ massimo allungamento dell'acciaio, e_{su}= **+10‰** ;
- □ non completo sfruttamento della resistenza del calcestruzzo, **0 ≤ -e_c** ≤ - e_{cu} = 3,5‰;
- □ **si hanno sezioni debolmente armate**.

CAMPO 3

- □ massimo accorciamento del calcestruzzo, **e = -3,5‰;**
- □ l'acciaio è in campo plastico, **e_{yd} = + 1,955 ≤ e_s ≤ e_{su} = + 10‰;**
- □ **si hanno sezioni normalmente armate.**

CAMPO 4

- □ massimo accorciamento del calcestruzzo, **e = -3,5‰**
- □ l'acciaio è in campo elastico, **e_{yd} ≤ e_s ≤ 0**
- □ **si hanno sezioni fortemente armate.**

Le sezioni ben proporzionate appartengono ai **campi 2 e 3**. Al **campo 4** appartengono le sezioni dal comportamento poco duttile e fragile, <u>sconsigliato nelle zone sismiche</u>.

Al fine di ottenere un'adeguata duttilità è bene che si abbia:

- un k = 0,45 per calcestruzzi di classe inferiore alla **C $_{35/45}$** ; $k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{\varepsilon_c} = \frac{x}{d}$
- un k = 0,35 per calcestruzzi di classe superiore o uguale alla **C $_{35/45}$** ; $k = \frac{x}{d}$

Il comportamento migliore della sezione inflessa si otterrà con la deformata rappresentata dalla retta **AB della figura 1**.

Prescrizioni previste dalla normativa del DM 14.01.2008

- ☐ Armatura longitudinale tesa : $A_s \geq A_{s\,\min} = 0{,}26 \cdot \dfrac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d$; $A_s \geq 0{,}0013 \cdot b \cdot d$
- ☐ Armatura longitudinale tesa o compressa , non superiore a $\leq 0{,}04 A_c$
- ☐ All'intradosso degli appoggi deve essere presente un'armatura metallica; $A_s \geq A_{s\,\min} = \dfrac{V_{\max}}{f_{yd}}$
- ☐ Area delle staffe $A_{st} \geq A_{s\,\min} = 1{,}5 \cdot b$ $(\mathrm{mm^2/m})$.
- ☐ Numero staffe: minimo 3 per ogni metro.
- ☐ Interasse delle staffe : $i \leq 0{,}80 \cdot d$.
- ☐ Le staffe devono assorbire almeno il 50% degli sforzi di taglio.

LA FESSIONE SEMPLICE RETTA : SEZIONE RETTANGOLARE

Sezione rettangolare con armatura semplice: Verifica della sezione

La verifica consiste nel calcolare il momento resistente M_{Rd} della sezione e controllare che risulti maggiore o al massimo uguale al momento di calcolo M_{Ed} ;

Quindi per la verifica deve essere : $\mathbf{M_{Rd} \geq M_{Ed}}$

Se la sezione è ben progettata. l'armatura tesa è sempre snervata e il diagramma della deformazione presenta una variazione lineare [fig. 2a].

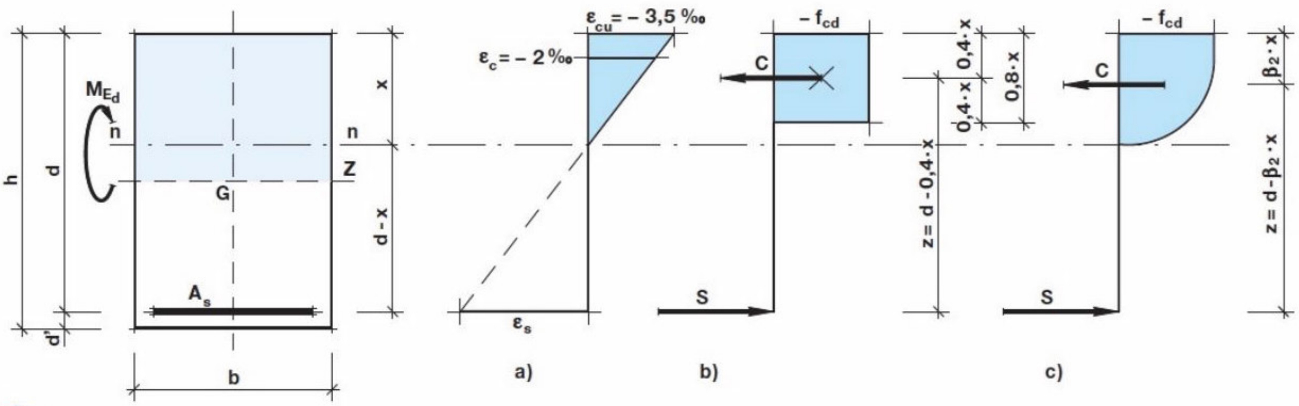


Fig. 2

Considerando per il calcestruzzo il diagramma rettangolo [fig. 2b] per le tensioni-deformazioni, il suo baricentro dista dal lembo superiore compresso della sezione della quantità: $\mathbf{d_G = 0{,}4 \cdot x}$

per cui il braccio della coppia resistente interna è: $\mathbf{z = d - 0{,}4 \cdot x}$

Le risultanti delle tensioni saranno :

per il calcestruzzo, indicate con la lettera **C =** $-f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8 \cdot x$; b = base , x = distanza asse neutro

applicata nel baricentro del diagramma delle tensioni assunto per semplificare di forma rettangolare.

per l'acciaio , indicate con la lettera **S =** $f_{yd} \cdot A_s$
applicata nel baricentro dell'armatura metallica tesa.

Determinazione della posizione dell'asse neutro: **x.**

Per la determinazione della posizione dell'asse neutro baricentrico della sezione reagente, consideriamo l'equilibrio alla traslazione orizzontale ∑X = 0 , cioè C + S = 0 ,

per cui C = S ; quindi avremo $f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8 \cdot x = f_{yd} \cdot A_s$ da questa equazione ricaviamo x:

$$x = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot 0{,}8 \cdot b}$$

Dall'esame della formula di deduce che la posizione dell'asse neutro è in funzione della quantità di armatura metallica e delle tensioni di calcolo del calcestruzzo e dell'acciaio.

Si definiscono alcuni parametri:

percentuale geometrica di armatura: $\omega_G = \frac{A_s}{b \cdot d}$:

percentuale meccanica di armatura: $\omega_M = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$.

Sostituendo il valore della x nel rapporto: $k = \frac{x}{d}$ otteniamo

$k = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d}$; ovvero $k = \frac{\omega_G}{0{,}8}$;

Il coefficiente k ci permette di individuare in quale campo di rottura cade la sezione in esame.

Determinazione dell'allungamento ε_s dell'acciaio teso.

Impostando la proporzione sui triangoli simili del diagramma sforzi deformazioni abbiamo:

$\varepsilon_s : (d - x) = \varepsilon_{cu} : x$; da cui $\varepsilon_s = \dfrac{(d-x)}{x} \cdot \varepsilon_{cu}$

Determinazione del momento resistente $M_{Rd.}$

Viene determinato applicando l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante C del diagramma delle tensioni di compressione.

$M_{Rd} = S \cdot z$ essendo **z = d - 0,4· x** **ed** **S =** $f_{yd} \cdot A_s$ quindi abbiamo:

$$M_{Rd} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot x)$$

Progetto della sezione :

La resistenza massima della sezione viene raggiunta quando gli accorciamenti ε_{cu} del calcestruzzo raggiungono il valore di - 3,5‰ e quelli dell'acciaio $\boldsymbol{\varepsilon_{su}}$ **= + 10‰.** Considerando il diagramma AB avremo un **k = 0,259.** cioè il rapporto x/d sarà di 0,259.

Dimensionamento della sezione

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse dell'armatura tesa il momento della coppia interna S e C che chiameremo M_i , deve essere uguale al momento di progetto o di calcolo M_{Ed}, quindi :

$$M_{Ed} = M_i = C \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) = 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (d - 0{,}4 \cdot x)$$

Ponendo x = 0,259 d abbiamo : $M_{Ed} = M_i = 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}259 \cdot d \cdot (d - 0{,}4 \cdot 0{,}259 \cdot d)$

$$M_{Ed} = M_i = 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}259 \cdot d \cdot (d - 0{,}4 \cdot 0{,}259 \cdot d)$$

$M_{Ed} = 0{,}1857 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$ da questa formula prefissando il valore della base si calcola l'altezza d

$d^2 = \dfrac{M_{Ed}}{0{,}1857 \cdot f_{cd} \cdot b}$; $d = \sqrt{\dfrac{M_{Ed}}{0{,}1857 \cdot f_{cd} \cdot b}}$; se poniamo $r = \sqrt{\dfrac{1}{0{,}1857 \cdot f_{cd}}}$, avremo che :

$d = \sqrt{\dfrac{r^2 M_{Ed}}{b}}$: $d = r \cdot \sqrt{\dfrac{M_{Ed}}{b}}$ **r** è un coefficiente in funzione di f_{cd} che ricava dalle tabelle.

Per calcolare la base viene prefissato il valore dell'altezza "**d**", quindi avremo:

$$b = \frac{M_{Ed}}{0{,}1857 \cdot f_{cd} \cdot d^2} \quad \text{ovvero} \quad b = r^2 \cdot \frac{M_{Ed}}{d^2}$$

Tabella 1 ■ Valori del coefficiente *r* per *k* = 0,259				
Classe del calcestruzzo	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 28/35
f_{cd} (N/mm²)	9,07	11,33	14,17	15,87
r	0,7707	0,6893	0,6166	0,5826

Determinazione dell'armatura tesa

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto alla linea di azione della risultante delle tensioni di compressione della coppia interna S e C che chiameremo M_i , deve essere uguale al momento di progetto o di calcolo M_{Ed}, quindi :

$M_{Ed} = M_i = S \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot x)$; da cui ponendo x = 0,259 d , avremo:

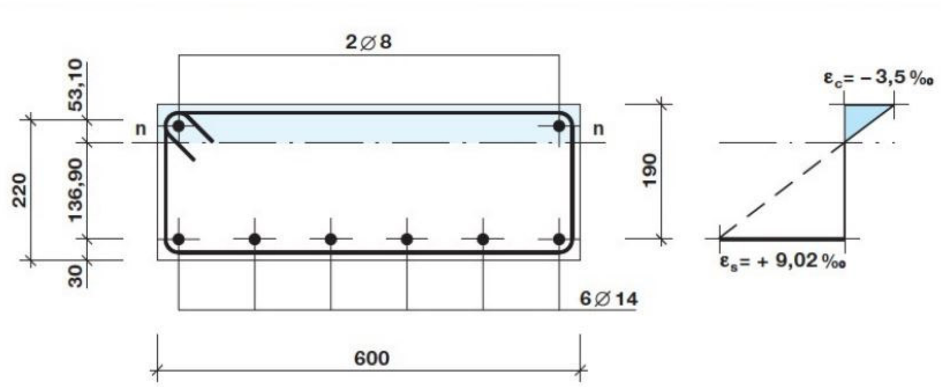
$$M_{Ed} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot 0{,}259 \cdot d) = A_s \cdot f_{yd} \cdot 0{,}8964 \cdot d$$

$A_s = \dfrac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot 0{,}8964 \cdot d}$; essendo $f_{yd} = 391 N/mm^2$ avremo : $A_s = \dfrac{M_{Ed}}{391 \cdot 0{,}8964 \cdot d}$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{350{,}49 \cdot d} \quad \text{o} \quad A_s = 2{,}853 \cdot 10^{-3} \cdot M_{Ed}$$

ESERCIZIO 1

Una trave in c.a. con sezione di 600 × 220 mm² in calcestruzzo classe C 25/30, armata con 6 ∅ 14 (copriferro 30 mm), è soggetta ai momenti flettenti M_{G1} = 28 kN m per carichi permanenti strutturali, M_{G2} = 8 kN m per carichi permanenti non strutturali e M_Q = 6 kN m per carichi variabili.
Calcolare il momento resistente, il grado di sicurezza e le deformazioni massime del calcestruzzo e dell'acciaio.



Si applica la combinazione fondamentale per determinare il momento di calcolo:

$$M_{Ed} = \gamma_{G1} \cdot M_{G1} + \gamma_{G2} \cdot M_{G2} + \gamma_Q \cdot M_Q$$
$$M_{Ed} = 1{,}30 \cdot 28 + 1{,}50 \cdot 8 + 1{,}50 \cdot 6 = 57{,}40 kNm$$

Per la verifica deve risultare che : $\mathbf{M_{Rd}} \geq \mathbf{M_{Ed}}$; $M_{Rd} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot x)$

Calcolo della distanza x dell'asse neutro dal bordo compresso. : $x = \dfrac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot 0{,}8 \cdot b}$;

Dati :

$f_{yd} = \dfrac{450}{1{,}15} = 391 \dfrac{N}{mm^2}$; $f_{cd} = \dfrac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}50} = 14{,}17 N/mm^2$; b = 600 ;

$A_s = 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3{,}14 = 923$ mm²;

$$x = \frac{391 \cdot 923}{14{,}17 \cdot 0{,}8 \cdot 600} = 53{,}06 mm$$

calcolo coefficiente k =x/d ; k = 53.06 /190 = **0,279** **La sezione si trova nel campo 3.**

$$M_{Rd} = 923 \cdot 391 \cdot (190 - 0{,}4 \cdot 53{,}06) = 60{,}832 \cdot 10^6 Nmm = 60{,}83 kNm$$

La sezione è verificata a flessione poiché $M_{Rd} > M_{Ed}$. il grado di sicurezza è 60,83/57,40 = 1, 06.

Con la sezione in campo 3 la deformazione max nel cls è ε_{cu} = - 3,5‰.

Calcolo della deformazione massima nell'acciaio: **z = d - 0,4· x = 190 -0,4· 53,06 =**

$$\varepsilon_s = \frac{(d - x)}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \qquad \varepsilon_s = \frac{(190 - 53{,}06)}{53{,}06} \cdot 3{,}5‰ = \mathbf{9{,}03 ‰}$$

ESERCIZIO 2

Progettare allo stato limite ultimo la trave semincastrata agli estremi con luce $l = 3{,}50$ m e altezza $h = 220$ mm (copriferro 40 mm), soggetta ai carichi permanenti strutturale $G_1 = 13$ kN/m, non strutturale $G_2 = 5$ kN/m e al carico variabile $Q_{k1} = 4$ kN/m, sapendo che verrà impiegato calcestruzzo classe C 25/30.

La soluzione del problema è connessa alla determinazione delle dimensioni della base "b" della trave e della quantità di armatura metallica tesa, espressa in numero di tondini e loro diametro.

I dati in possesso sono :

- Lunghezza della trave **l** = 3,50 m.
- Altezza **h** della trave 220 mm.
- Spessore **d′** del copriferro 40 mm.
- Carichi applicati **G_1**=13 kN/m; **G_2**=5 kN/m ; **Q_{k1}**=4 kN/m.
- Classe del calcestruzzo **$C_{25/30}$**.
- Altezza "**d**" della sezione di mm 180 (= 220 – 40).

A questi dovranno essere aggiunti i seguenti dati :

- Momento di calcolo, $M_{Ed,}$ per determinarlo si applica la combinazione fondamentale alla azioni :

$$F_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_{k1}$$

$$F_d = 1{,}30 \cdot 13 + 1{,}50 \cdot 5 + 1{,}50 \cdot 4 = 30{,}4 kN/m$$

Dato che si tratta di una trave semincastrata il momento massimo di calcolo sarà: $M_{ed} = \frac{1}{12} ql^2$; $M_{ed} = \frac{1}{12} 30{,}4 \cdot 3{,}5^2 = 31{,}03 kNm$

- Valori relativi alle deformazioni massime del calcestruzzo e dell'acciaio in relazione alla resistenza massima della sezione, ipotizzata nel campo 3 con il rapporto x/d = 0,259. I valori massimi di deformazione saranno ε_{cu} = - 3,5‰ per calcestruzzo, e di **ε_{su} = + 10‰ per** dell'acciaio.
- La resistenza di progetto o di calcolo dell'acciaio: $f_{yd} = \frac{450}{1{,}15} = 391 \frac{N}{mm^2}$:
- La resistenza di progetto o di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \frac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}50} = 14{,}17 N/mm^2$

Questi dati ci permetteranno di calcolare prima la base della trave e in seguito l'armatura metallica tesa.

Calcolo della base "**b**" , della trave, applicherà la seguente formula.

$b = r^2 \cdot \frac{M_{Ed}}{d^2}$; **r = 0,6166** è un coefficiente in funzione di f_{cd}= 14,17 N/mm^2 che ricava dalle tabelle.

Sostituendo i valori abbiamo : $b = (0{,}6166)^2 \cdot \frac{31{,}03 \cdot 10^6}{180^2} = 364{,}11 mm$

Allo stesso risultato si perviene applicando la formula derivata dalla $M_{Ed} = 0{,}1857 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$;

$$b = \frac{M_{Ed}}{0{,}1857 \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad ; \quad b = \frac{31{,}03 \cdot 10^6}{0{,}1857 \cdot 180^2 \cdot 14{,}17} = 364{,}1 mm$$

Calcolo dell'armatura metallica tesa.

Si applicherà la seguente formula : $A_s = \dfrac{M_{Ed}}{350{,}49 \cdot d}$

$A_s = \dfrac{31{,}03 \cdot 10^6}{350{,}49 \cdot 180} = 491 mm^2$ che trasformata in tondini da ∅ 14 darà : N° ∅ 14 =491/154= 3, 18

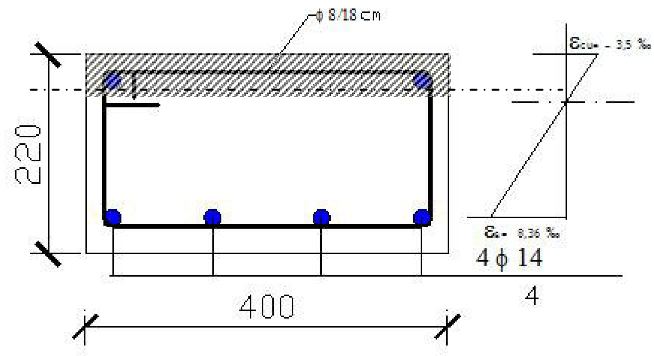
Tale armatura sarà arrotondata a 4 ∅ 14 e quindi un'area di 4 x 154 = 616 mm^2.

Calcolo della distanza dell'asse neutro dal bordo compresso. $x = \dfrac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot 0{,}8 \cdot b}$

$x = \dfrac{391 \cdot 616}{14{,}17 \cdot 0{,}8 \cdot 400} = 53{,}11 mm$ k = x/d ; k = 53,11/180 = 0, 295 la sezione è nel campo 3

Determinata la posizione dell'asse neutro possiamo determinare l'allungamento ε_s dell'acciaio teso. Impostando la proporzione sui triangoli simili del diagramma sforzi deformazioni abbiamo:

$\varepsilon_s : (d - x) = \varepsilon_{cu} : x$; da cui $\varepsilon_s = \dfrac{(d-x)}{x} \cdot \varepsilon_{cu}$; $\varepsilon_s = \dfrac{(180 - 53{,}11)}{53{,}11} \cdot 3{,}5‰ = 8{,}36‰$



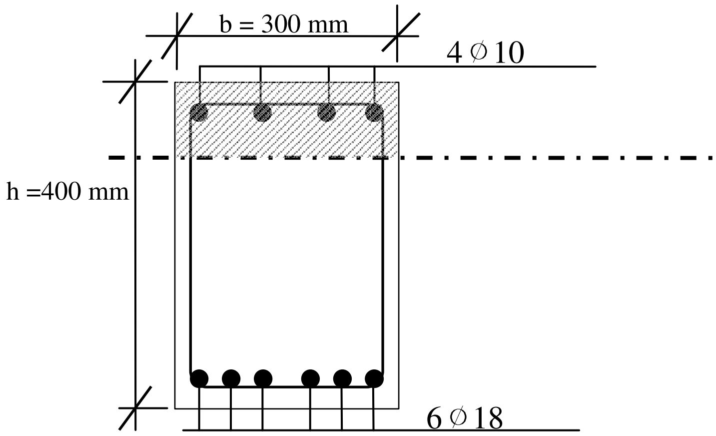
Determinazione del momento resistente M_{Rd} $M_{Rd} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot x)$

$M_{Rd} = 616 \cdot 391 \cdot (180 - 0{,}4 \cdot 53{,}11) = 38{,}24 kNm \geq M_{Ed}$

Il coefficiente di sicurezza è M_{Rd} / M_{Ed} = 38,24 /31,03 = **1,23**.

ESERCIZIO 3

Calcolare la posizione dell'asse neutro e il momento resistente della sezione in c.a. di 300 × 400 mm², realizzata con calcestruzzo classe C 25/30, armata con 4 ∅ 10 superiori e 6 ∅ 18 inferiori (copriferro 40 mm).



I dati in possesso sono :

- Altezza **h** della trave 400 mm.
- Spessore **d′** del copriferro 40 mm.
- Classe del calcestruzzo **C$_{25/30}$**.
- Altezza "**d**" della sezione di mm 360 (= 400 – 40).
- La resistenza di progetto o di calcolo dell'acciaio: $f_{yd} = \frac{450}{1{,}15} = 391 \frac{N}{mm^2}$:
- La resistenza di progetto o di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \frac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}50} = 14{,}17 N/mm^2$
- A_s = 6 ∅ 18 = 6 x 78,5 = 1.526 mm^2
- A'_s = 4 ∅ 10 = 4 x 78,5 = 314 mm^2

Si ipotizza lo snervamento dell'armatura compressa, per cui la posizione dell'asse neutro sarà:

$$x = \frac{f_{yd} \cdot (A_s - A_s^I)}{f_{cd} \cdot 0{,}8 \cdot b} \qquad x = \frac{391 \cdot (1526 - 314)}{14{,}17 \cdot 0{,}8 \cdot 300} = 139{,}42 mm > 2{,}27 \cdot 40 \ (= 90{,}80);$$

Quindi essendo x > 2,27·d$'$, l'armatura compressa è snervata, per cui il valore di x è compatibile.

Calcolo del momento resistente:

$$M_{Rd} = f_{yd} \cdot (A_s \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) + A_s^{'} \cdot (0{,}4 \cdot x - d));$$

$$M_{Rd} = 391 \cdot (1526 \cdot (360 - 0{,}4 \cdot 139{,}42) + 314 \cdot (0{,}4 \cdot 139{,}42 - 40)) = 183{,}56 kNm$$