

Università di Firenze
Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso di TECNICA DELLE COSTRUZIONI

APPUNTI DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI

(prof. Gianni Bartoli e prof. Maurizio Orlando)

- **Il cemento armato.**
- **Proprietà del calcestruzzo e dell'acciaio.**
- **Stati limite nel cemento armato.**
- **Stato limite ultimo per tensioni normali.**
- **Stati limite nel cemento armato Il taglio nel c.a.**

Il cemento armato

Proprietà del calcestruzzo e dell'acciaio

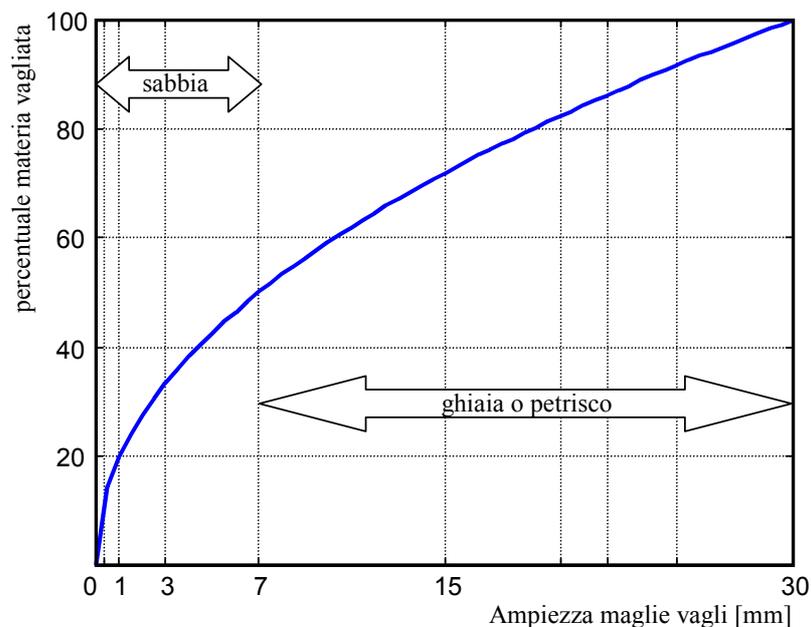
Il cemento armato (c.a.) – o come sarebbe più corretto definirlo, il conglomerato cementizio armato (c.c.a.) – è un materiale composito formato da calcestruzzo e da acciaio. L'acciaio è presente sotto forma di barre a sezione circolare, che vengono disposte in posizioni ben precise all'interno dell'elemento strutturale prima di eseguire il getto del calcestruzzo interiormente alle casseforme.

Il calcestruzzo (spesso abbreviato con cls) è un conglomerato di cemento, sabbia, ghiaia ed acqua in opportune proporzioni. Di seguito si riportano le quantità in cui i vari componenti entrano nella miscela di un metro cubo di calcestruzzo di normale resistenza:

- ghiaia 0,8 mc/mc
- sabbia 0,4 mc/mc
- acqua 120 ÷ 180 l/mc
- cemento 300 kg/mc

Non deve stupire il fatto che la somma dei volumi “sciolti” dei vari componenti superi il valore di 1 mc; la diversa granulometria degli inerti e la presenza di acqua fanno sì che gli elementi di diametro più piccolo vadano a occupare i vuoti lasciati dagli altri elementi di pezzatura più grossa, definendo alla fine un volume minore di quello iniziale. Per questo motivo, le dimensioni degli inerti devono essere distribuite in maniera adeguata, in modo da ottenere granuli di grandezza opportunamente assortita. La composizione granulometrica viene definita dalle percentuali di materia che passano attraverso vagli di una determinata serie (generalmente con diametri crescenti); la curva che si ottiene riportando in ascissa il diametro dei fori del vaglio ed in ordinata la percentuale di inerte passante al vaglio di quel diametro si chiama curva di granulazione o curva granulometrica,

_____ un esempio della quale è riportato nella figura seguente.



Esempio di curva granulometrica

Il calcestruzzo ha una ottima resistenza a compressione, ma una bassa, quasi nulla, resistenza a trazione (pari a circa 1/10 di quella a compressione), pertanto un elemento di calcestruzzo soggetto a trazione si fessura per valori dello sforzo di trazione molto piccoli.

L'idea di un materiale composito formato da calcestruzzo e da barre di acciaio nasce dall'esigenza di sopperire alla piccola resistenza a trazione del calcestruzzo mediante l'introduzione delle barre metalliche.

L'accoppiamento tra i due materiali è garantito dai seguenti fattori:

- il calcestruzzo durante la presa serra le barre di acciaio e vi aderisce,
- il calcestruzzo e l'acciaio hanno lo stesso coefficiente di dilatazione termica ($10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), per cui per effetto di una variazione di temperatura i due materiali si deformano allo stesso modo,
- il calcestruzzo protegge le barre metalliche dall'attacco degli agenti atmosferici,
- a differenza delle strutture in acciaio (meno flessibili dal punto di vista della forma) le strutture in c.a. si adattano a qualsiasi forma costruttiva.

Di seguito si descrivono le principali proprietà del calcestruzzo (fresco e indurito) e dell'acciaio utilizzati nella realizzazione delle opere di c.a.

Proprietà del calcestruzzo fresco

Si premette alla descrizione delle proprietà del calcestruzzo indurito, quella delle proprietà del calcestruzzo fresco, in quanto queste ultime influenzano in modo significativo la qualità del calcestruzzo indurito.

Le due proprietà fondamentali del calcestruzzo fresco sono la lavorabilità e l'omogeneità.

La lavorabilità rappresenta l'attitudine alla messa in opera ed al successivo costipamento del cls, mentre l'omogeneità riguarda la distribuzione uniforme dei vari componenti della miscela affinché il materiale indurito presenti ovunque le stesse proprietà fisico - meccaniche.

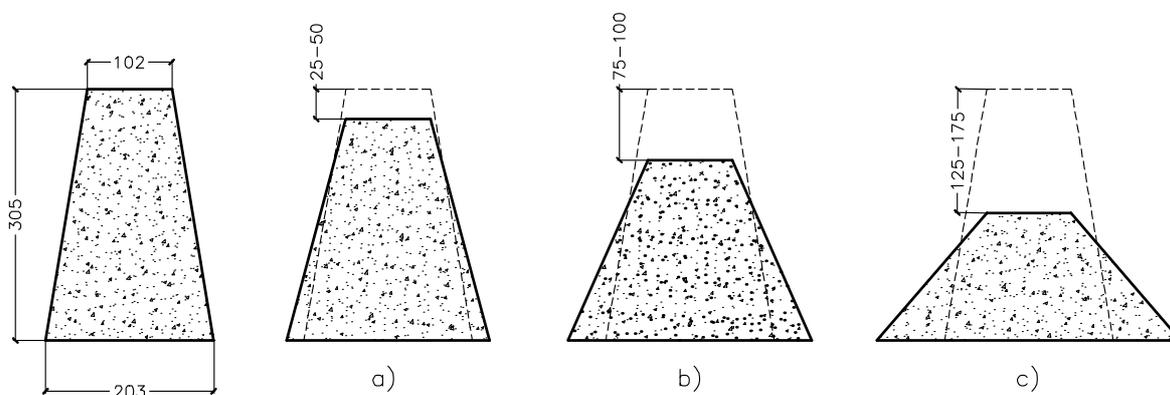
Le due proprietà sono strettamente legate l'una all'altra, in quanto per ottenere un materiale omogeneo è necessario impastare adeguatamente la miscela e questa operazione è tanto più efficace quanto più la miscela stessa è lavorabile.

La lavorabilità di un impasto viene valutata attraverso la sua "consistenza", che rappresenta la resistenza del calcestruzzo fresco a cambiare forma, pertanto la consistenza è tanto minore quanto più il calcestruzzo è lavorabile.

La consistenza viene determinata mediante una prova sperimentale ("slump-test"), che consiste nel porre il calcestruzzo fresco all'interno di recipiente tronco-conico di dimensioni standard (cono di Abrams), aperto sia superiormente che inferiormente, e nel misurare di quanto si abbassa il cls una volta che il recipiente viene sfilato superiormente. L'abbassamento viene assunto come indice della consistenza del cls.

In funzione dei valori dell'abbassamento al cono di Abrams si può avere:

- consistenza asciutta, per valori dell'abbassamento tra 25 e 50 mm,
- consistenza plastica, per valori dell'abbassamento tra 75 e 100 mm,
- consistenza fluida, per valori dell'abbassamento tra 125 e 175 mm.



La consistenza viene scelta dal progettista in funzione di:

- sezione minima della struttura,
-

- densità di armatura,
- sistemi di compattazione disponibili,
- qualità della manodopera,
- tecniche di esecuzione,
- organizzazione del cantiere.

Ad esempio quanto maggiore è la densità dei ferri di armatura e quanto più piccola è la sezione dell'elemento strutturale da realizzare, tanto maggiore dovrà essere la lavorabilità del cls.

Il parametro che condiziona più di tutti la lavorabilità di un impasto di cls è il rapporto in peso acqua cemento (a/c): al crescere di a/c aumenta la lavorabilità, ossia diminuisce la consistenza. Occorre evitare pericolose riaggiate di acqua all'interno dell'impasto per aumentare la lavorabilità, perché così facendo si riducono le prestazioni meccaniche del materiale indurito. Per questo motivo esistono dei fluidificanti che vengono aggiunti all'impasto per migliorare la lavorabilità senza alterare il rapporto acqua/cemento.

Proprietà del calcestruzzo indurito

Resistenza a compressione semplice

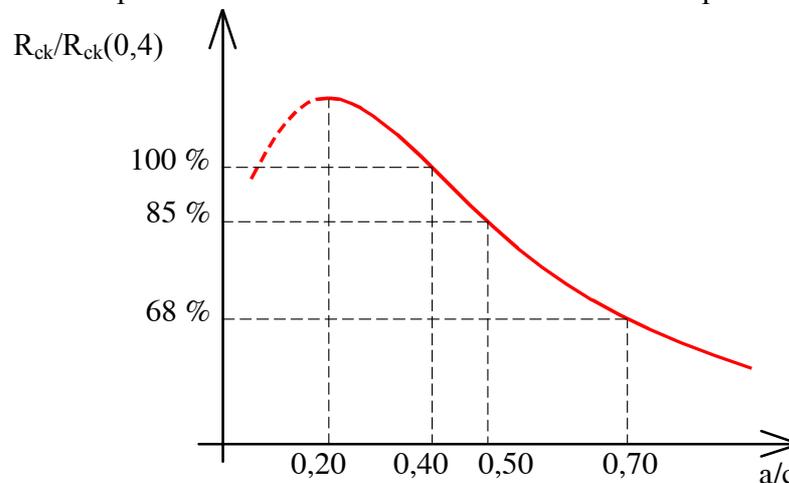
La proprietà fondamentale che caratterizza la qualità di un calcestruzzo, ad indurimento avvenuto, è la resistenza a compressione semplice. È pertanto necessario introdurre tutte le grandezze che la influenzano in modo significativo, tra le quali le più importanti sono:

- il rapporto in peso acqua/cemento,
- il dosaggio di cemento (quantitativo di cemento in un mc di calcestruzzo),
- la classe di resistenza del cemento (resistenza del cemento testata su una malta standardizzata),
- la granulometria degli inerti.

A queste si aggiungono inoltre:

- le condizioni di messa in opera,
- le condizioni ambientali,
- l'età della messa in carico,
- la forma e le dimensioni del provino,
- il tipo di sollecitazione prevalente.

Tra le grandezze sopra elencate risulta decisivo, a parità di tutti gli altri parametri, il valore del **rapporto** (in peso) **acqua-cemento**, al diminuire del quale aumenta la resistenza del calcestruzzo, come indicato nella figura seguente, dove i valori della resistenza caratteristica al variare di a/c sono stati adimensionalizzati rispetto alla resistenza meccanica che si ottiene per a/c=0.4.



Osservazione: il rapporto $a/c=0.2\div 0.3$ corrisponde al rapporto stechiometrico, ossia alla quantità di acqua necessaria perché possano avvenire le reazioni nel calcestruzzo; di conseguenza non è ovviamente possibile fare riferimento a valori inferiori a tale limite

Al di sotto di un certo limite ($a/c \cong 0.2$) la resistenza diminuisce, perché per insufficienza di acqua le reazioni chimiche non possono più svilupparsi completamente ed una parte del cemento rimane inerte. Il rapporto ottimale, quello che fornisce cioè una buona resistenza permettendo al tempo stesso la lavorabilità dell'impasto, è intorno a $0.45 \div 0.55$.

Altri due parametri di grande importanza sono rappresentati dal dosaggio del cemento, cioè dal quantitativo di cemento che viene utilizzato per confezionare un mc di calcestruzzo, e dalla classe e tipo di cemento usato.

La resistenza del calcestruzzo aumenta sia al crescere del dosaggio di cemento sia al crescere della sua classe. Per classe del cemento si intende la resistenza meccanica di una malta standardizzata preparata con il cemento dato.

Secondo la classificazione data dalla normativa attuale esistono ben 150 diversi cementi, suddivisi in cinque tipi contraddistinti dalla sigla CEM:

CEM I = Cemento Portland

CEM II = Cemento Portland di miscela

CEM III = Cemento d'altoforno

CEM IV = cemento pozzolanico

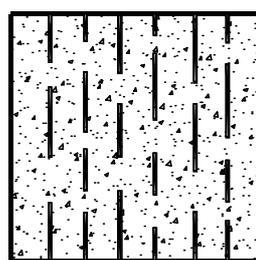
CEM V = cemento composito

Per ciascun tipo esistono quindi dei sottotipi, per un totale di 25 sottotipi, e per ciascun sottotipo, in funzione della finezza di macinazione, esistono 6 diverse classi di resistenza.

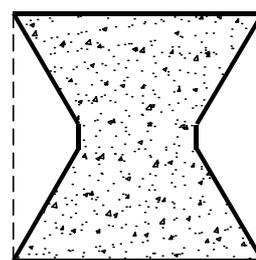
La vecchia classificazione prevedeva solo nove tipi di cemento: Portland, pozzolanico e d'altoforno, ciascuno disponibile in tre classi di resistenza: 325, 425, 525.

Tutte le norme definiscono la resistenza alla compressione come quella che si ottiene sottoponendo a prove di compressione semplice, provini cubici o prismatici di dimensioni standard con stagionatura di 28 giorni. La figura seguente illustra una prova a compressione su un provino cilindrico. La norma italiana fa riferimento per il metodo delle tensioni ammissibili alla resistenza misurata su provini cubici, ed in particolare alla cosiddetta **resistenza caratteristica** (indicata con il simbolo $R_{ck}^{(*)}$), definita come il valore della resistenza che ha solo il 5 % di probabilità di essere minorato, o in modo equivalente al di sotto della quale ci si attende di trovare solo il 5 % della popolazione di tutte le misure.

La rottura di un provino cubico soggetto a compressione semplice può manifestarsi secondo due diverse modalità: a) con lesioni verticali, b) con lesioni inclinate.



a)

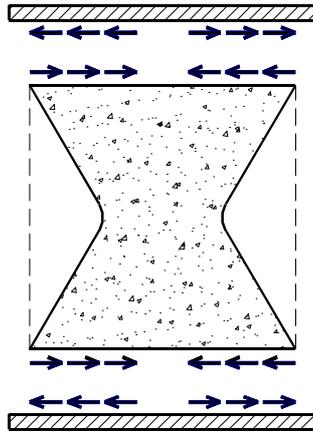


b)

- a) rottura con lesioni verticali
- b) rottura con lesioni inclinate (il provino assume la tipica forma di due tronchi di piramide sovrapposti)

(*) Nelle vecchie norme la resistenza caratteristica era indicata con il simbolo R_{bk} (dove b stava per *beton*).

Nel caso b) le lesioni a 45° si formano a causa delle forze di attrito che si sviluppano tra le superfici del provino e i piatti della pressa, che impediscono la loro deformazione.



Schematizzazione delle forze di attrito alla base del provino

Al variare delle dimensioni del provino, ed a parità di forma, si registrano resistenze diverse. Per strutture in cemento armato normale la normativa italiana (punto 5.2. D.Min.LL.PP. 09.01.96) impone di rispettare le seguenti limitazioni:

- per strutture armate non è ammesso l'impiego di conglomerati con $R_{ck} < 15 \text{ N/mm}^2$,
- nei calcoli statici non si può considerare una resistenza caratteristica superiore a 55 N/mm^2 ,
- per $R_{ck} \geq 40 \text{ N/mm}^2$ sono richiesti controlli statistici sia preliminari sia in corso d'impiego e calcoli accurati delle strutture.

Per il metodo agli stati limite la norma italiana, così come la normativa europea, fa invece riferimento alla resistenza misurata su provini cilindrici. Questi provini hanno un rapporto altezza – diametro pari a 2 ($d = 150 \text{ mm}$, $h = 300 \text{ mm}$), pertanto l'effetto di attrito delle piastre della pressa è molto piccolo nella zona centrale del provino e si misura un valore inferiore della resistenza rispetto ai provini cubici.

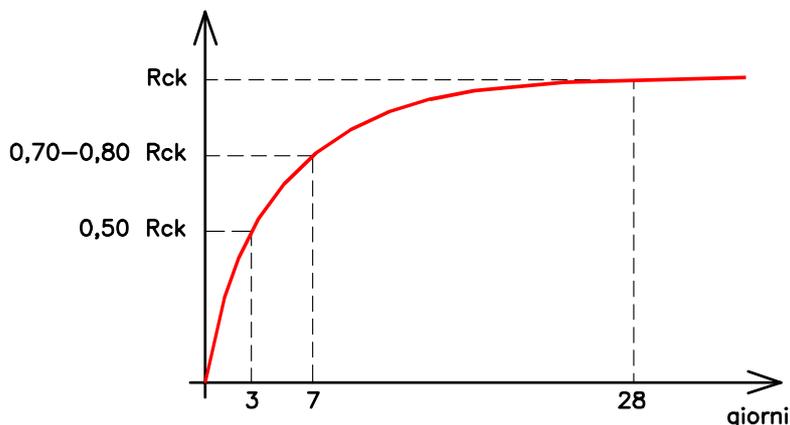
La relazione tra la resistenza caratteristica misurata su provini cilindrici (f_{ck}) e quella misurata su provini prismatici (R_{ck}) è pertanto pari a:

$$f_{ck} = 0,83 R_{ck}^{(**)}$$

Nelle normative di ultima generazione, il calcestruzzo viene spesso indicato con una sigla del tipo C20/25 (o analoghe) in cui si evidenzia sia la resistenza caratteristica cilindrica (primo numero) che quella cubica (secondo numero). Nel caso indicato si sarebbe quindi in presenza di un calcestruzzo con resistenza cilindrica pari a 20 N/mm^2 ed una corrispondente resistenza cubica pari a 25 N/mm^2 .

La resistenza a compressione aumenta nel tempo:

(**) A rigore il coefficiente di conversione per passare da R_{ck} a f_{ck} varia con le dimensioni dei provini utilizzati; 0.83 può essere assunto come valore medio.



A soli tre giorni dal getto la resistenza a compressione è già pari al 50 % della resistenza caratteristica misurata a 28 giorni dal getto, mentre dopo una settimana è pari a circa il 70 – 80 % della R_{ck} .

Prescrizioni normative per il controllo della resistenza caratteristica

(Allegato 2 al D.Min. LL.PP. 09.01.96)

Controllo di accettazione: riguarda il controllo del calcestruzzo durante l'esecuzione delle opere; ogni controllo di accettazione è rappresentato da tre prelievi, ognuno dei quali eseguito ogni 100 mc di getto; pertanto si ha un controllo di accettazione ogni 300 mc di getto (comunque va effettuato almeno un prelievo per ogni giorno di getto)

Prelievo: consiste nel prelevare dagli impasti, al momento della posa in opera nei casseri, il calcestruzzo necessario per la confezione di un gruppo di due provini

Resistenza di prelievo: media delle resistenze a compressione dei due provini di un prelievo

Siano:

R_1, R_2 e R_3 le tre resistenze di prelievo, con $R_1 \leq R_2 \leq R_3$,

R_m la resistenza media, $R_m = (R_1 + R_2 + R_3) / 3$

R_{ck} la resistenza caratteristica

il controllo è positivo se:

$$R_m \geq R_{ck} + 3,5 \text{ N/mm}^2$$

$$R_1 \geq R_{ck} - 3,5 \text{ N/mm}^2$$

Nelle strutture con meno di 100 mc di getto, non è obbligatorio procedere al prelievo giornaliero, ma rimane quello di eseguire almeno tre prelievi.

In una costruzione con più di 1500 mc di getto, si può procedere ad un controllo di tipo statistico ogni 1500 mc di getto.

Si deve effettuare un prelievo per ogni giorno di getto e almeno 15 prelievi su 1500 mc.

Indicato con s lo scarto quadratico medio delle resistenze di prelievo, il controllo risulta positivo se:

$$R_m \geq R_{ck} + 1,4 s$$

$$R_1 \geq R_{ck} - 3,5 \text{ N/mm}^2$$

Durabilità

La durabilità del calcestruzzo rappresenta la capacità del materiale di durare nel tempo resistendo alle azioni aggressive dell'ambiente esterno.

In modo analogo la durabilità di una struttura di cemento armato si definisce come la capacità della struttura di durare nel tempo garantendo il servizio per il quale è stata progettata.

La durabilità del calcestruzzo è una condizione necessaria per la durabilità di una struttura di c.a., ma non è da sola sufficiente. Difatti tra le cause di degrado delle strutture di c.a. occorre annoverare anche l'inadeguato costipamento del calcestruzzo all'interno dei casseri, gli errori di progettazione e un diverso utilizzo delle strutture rispetto a quanto previsto in fase di progetto.

La durabilità del calcestruzzo dipende per la maggior parte dalla permeabilità del materiale all'acqua. Maggiore è la permeabilità, minore è il quantitativo di agenti aggressivi disciolti nell'acqua che riescono a penetrare nel materiale. Pertanto un calcestruzzo è tanto più durevole quanto più impermeabile, ossia quanto meno poroso.

Infine essendo la porosità del cls strettamente legata al rapporto acqua-cemento (a bassi valori di a/c corrispondono basse porosità) se ne deduce che la durabilità di un cls è strettamente legata al valore del rapporto acqua-cemento: **quanto minore è a/c, tanto più il calcestruzzo è durevole.**

Altre proprietà del calcestruzzo indurito

Modulo di elasticità del calcestruzzo

Per modulo di elasticità del calcestruzzo si intende quello tangente all'origine della curva sforzi-deformazioni che si ottiene da una prova di compressione semplice istantanea.

All'aumentare della resistenza del calcestruzzo, aumenta il valore del modulo di elasticità, cioè un calcestruzzo è tanto più rigido quanto più è resistente.

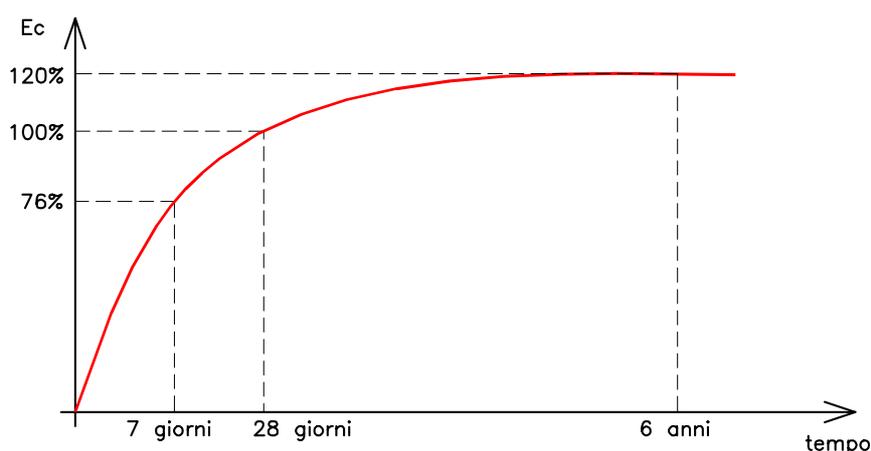
La normativa italiana fissa il seguente valore del modulo di elasticità all'origine:

$$E_c = 18000\sqrt{R_{ck}} \quad (\text{kg/cm}^2)$$

$$E_c = 5700\sqrt{R_{ck}} \quad (\text{N/mm}^2)$$

Si ricorda che il comportamento del calcestruzzo può ritenersi con buona approssimazione elastico lineare solo per valori degli sforzi di compressione non superiori al 30 % della resistenza a compressione del calcestruzzo.

Il modulo di elasticità di un calcestruzzo aumenta nel tempo così come la resistenza. Questo si spiega con il continuo processo di reazione tra l'acqua ed il cemento. La figura seguente mostra la variazione di E_c nel tempo.



Coefficiente di Poisson

Per il coefficiente di Poisson di un calcestruzzo si assume un valore compreso tra 0 e 0.2, in funzione dello stato di sollecitazione (vedi punto 2.1.4 del D.Min. LL.PP. 09.01.96).

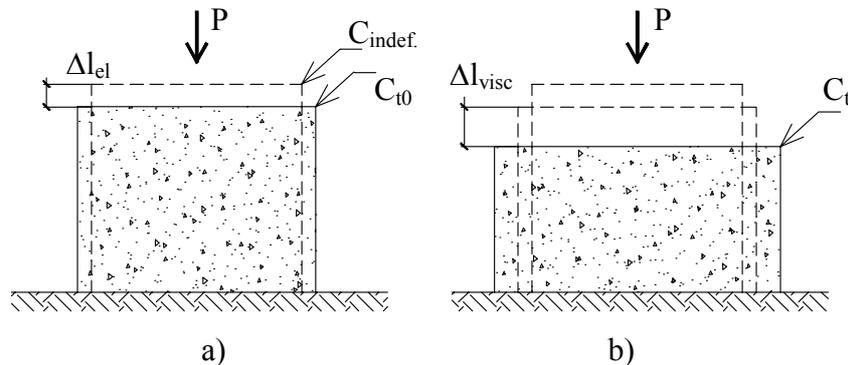
Viscosità

Si consideri un provino di calcestruzzo di altezza l ed area A , e lo si sottoponga ad un carico P di compressione sulla base superiore. Il provino subisce un accorciamento elastico istantaneo Δl_{el} pari a:

$$\Delta l_{el} = \varepsilon_{el} l = \frac{Pl}{AE}.$$

Se il carico P viene rimosso subito dopo aver registrato l'abbassamento, il provino riassume la configurazione originaria, recuperando per intero l'accorciamento subito.

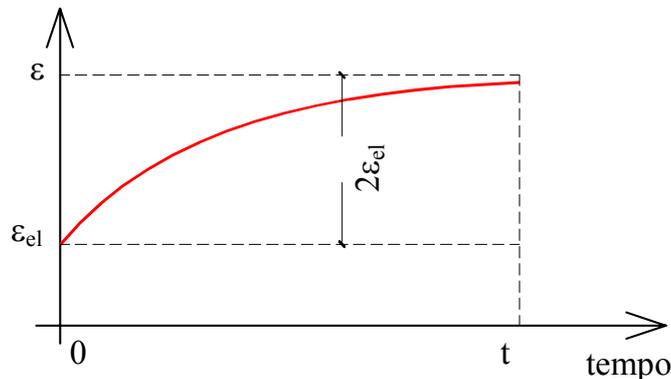
Si immagini ora di mantenere il carico P applicato sul provino nel tempo. In questo caso si osserva che alla deformazione istantanea verificatasi al momento di applicazione del carico, segue una deformazione differita nel tempo, la cui intensità aumenta nel tempo.



a) C_{t_0} = configurazione deformata all'istante t_0 di applicazione del carico

b) C_t = configurazione deformata all'istante $t > t_0$

Se si costruisce un diagramma riportando sull'asse delle ordinate la deformazione del provino e sull'asse delle ascisse il tempo, si ottiene una curva il cui andamento qualitativo è rappresentato nella figura seguente:



La curva parte dal punto di coordinate $(\varepsilon_{el}, 0)$ corrispondente alla deformazione elastica istantanea del provino all'istante $t=0$ di applicazione del carico, quindi perdurando il carico si osserva un graduale aumento della deformazione, che per $t \rightarrow \infty$ tende asintoticamente a un valore pari a circa il triplo della deformazione elastica iniziale.

La differenza tra la deformazione totale al tempo t e la deformazione elastica iniziale al tempo t_0 rappresenta la deformazione viscosa che il provino ha subito nell'intervallo $\Delta t = (t-t_0)$ a carico costante. Essa è pari a circa due volte la deformazione elastica per $t \rightarrow \infty$.

In modo convenzionale, il comportamento del calcestruzzo sotto carichi di lunga durata, che permangono cioè sulla struttura in c.a. per un periodo di tempo molto lungo o addirittura per tutta la vita della struttura, può essere rappresentato schematicamente con quello di un materiale avente un modulo di elasticità fittizio E_∞ pari a $1/3$ di quello elastico.

Difatti, si ha:

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E_0} \quad \varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma}{E_{\infty}}$$

essendo $\varepsilon_{\infty} \cong 3\varepsilon_{el}$, si può scrivere:

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma}{E_{\infty}} = 3\varepsilon_{el} = 3\frac{\sigma}{E_0}, \text{ da cui } E_{\infty} = \frac{E_0}{3}.$$

Tondini di ferro

Le barre di acciaio che si utilizzano nelle strutture in c.a. sono fornite in elementi della lunghezza massima di 12 m. I diametri disponibili sono invece compresi tra 5 e 30 mm^(***). Ad esclusione del diametro 5, i diametri commerciali disponibili in Italia sono rappresentati da valori pari del diametro espresso in mm; si troverà ad esempio una barra di diametro 16 ($\phi 16$) ma non sono in commercio barre con diametro 17 ($\phi 17$).

La normativa italiana prevede l'utilizzo di due tipi di barre da cemento armato:

- barre tonde lisce: sono barre dalla superficie liscia, che non si utilizzano ormai più
- barre ad aderenza migliorata: sono barre la cui superficie è resa scabra da appositi risalti o costole, atte a migliorare le condizioni di aderenza al calcestruzzo; le barre ad aderenza migliorata sono caratterizzate dal diametro ϕ della barra tonda liscia equipesante, calcolato nell'ipotesi che il peso specifico dell'acciaio sia pari a 78,50 kN/m³.



Esempio di costole sulla superficie di una barra ad aderenza migliorata

La normativa prevede due tipi di acciaio per le barre tonde lisce ed altri due tipi di acciaio per quelle ad aderenza migliorata.

La seguente tabella riporta le proprietà prescritte dalla normativa per le barre tonde lisce e per quelle ad aderenza migliorata:

tipo di barre	barre tonde lisce		barre ad aderenza migliorata	
tipo di acciaio	Fe B 22 k	Fe B 32 K	Fe B 38 k	Fe B 44 k
tensione caratteristica di snervamento f_y (N/mm ²)	≥ 215	≥ 315	≥ 375	≥ 430
tensione caratteristica di rottura f_t (N/mm ²)	≥ 335	≥ 490	≥ 450	≥ 540
allungamento A5 ^(****)	$\geq 24 \%$	$\geq 23 \%$	$\geq 14 \%$	$\geq 12 \%$

(***) L'utilizzo di barre di acciaio FeB44k di diametro superiore a 26 mm deve essere autorizzato dal Servizio Tecnico Centrale del Ministero dei Lavori Pubblici, sentito il Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici (punti 2.2.3 e 2.2.7 del D.Min.LL.PP. 09.01.96).

(****) Allungamento A5: rappresenta l'allungamento a rottura misurato su cinque provini.

Gli acciai da cemento armato normale sono designati con un numero che indica la loro tensione di snervamento in kg/mm^2 .

Gli acciai da carpenteria metallica sono invece designati con un numero che indica la loro tensione di rottura in N/mm^2 .

Dalla tabella precedente risulta evidente come gli acciai delle barre lisce siano meno resistenti di quelli delle barre ad aderenza migliorata, ma siano più duttili.

Ad esempio, l'acciaio FeB22k ha una tensione di snervamento pari a solo il 50% di quella dell'acciaio FeB44k, ma l'allungamento a rottura è il doppio!

Nella tabella successiva sono riportati i valori dell'area e del peso per le barre in acciaio normalmente utilizzate (avendo considerato un peso specifico per l'acciaio pari a $7850 \text{ kg}/\text{m}^3$)^(****).

BARRE ACCIAIO DA C.A.		
diametro (mm)	area (cm^2)	peso (kg/m)
5	0.196	0.154
6	0.283	0.222
8	0.503	0.395
10	0.785	0.617
12	1.131	0.888
14	1.539	1.208
16	2.011	1.578
18	2.545	1.998
20	3.142	2.466
22	3.801	2.984
24	4.524	3.551
26	5.309	4.168
28	6.158	4.834
30	7.069	5.549

Normative di riferimento

La verifica di una struttura in c.a. può essere eseguita con il metodo delle tensioni ammissibili o con il metodo degli stati limite.

Per le verifiche con il metodo degli stati limite si applicano le seguenti norme:

- D.M. LL.PP. del 09/01/1996 “*Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche*”;
- Circolare Min. LL.PP. del 15/10/1996 n. 252 AA.GG./S.T.C. - *Istruzioni per l'applicazione delle “Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche”* di cui al Decreto Ministeriale 9 gennaio 1996.

(****) Nel calcolo del c.a. si assume un peso specifico convenzionale pari a $2500 \text{ kg}/\text{m}^3$ indipendentemente dall'effettiva armatura disposta; il peso specifico del solo conglomerato cementizio è assunto invece pari a $2400 \text{ kg}/\text{m}^3$. La differenza (circa $100 \text{ kg}/\text{m}^3$) costituisce un valore medio dell'incidenza delle armature sul peso totale.

Per le verifiche con il metodo delle tensioni ammissibili si applicano le seguenti norme:

- D.M. LL.PP. del 14/02/1992 “*Norme tecniche per l’esecuzione delle opere in cemento armato normale o precompresso e strutture metalliche*”;
- Circolare Min. LL.PP. del 24/06/1993 n. 37406/STC “*Legge 5.11.1971 n° 1086 - Istruzioni per l’applicazione delle “Norme Tecniche per l’esecuzione delle opere in cemento armato normale o precompresso e strutture metalliche” di cui al Decreto Ministeriale 14 febbraio 1992;*

salvo che per i materiali, i prodotti, il collaudo statico e gli allegati, per i quali occorre fare riferimento al decreto ed alla circolare del 1996, già riportati sopra per il metodo agli stati limite.

Per entrambi i metodi di verifica occorre adottare i valori delle azioni riportati in:

- D.M. LL.PP. del 16/01/1996 “*Norme tecniche relative ai «Criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi»*”;
- Circolare Min. LL.PP. del 04/07/1996 n. 156 AA.GG./S.T.C. - *Istruzioni per l’applicazione delle “Norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi” di cui al Decreto Ministeriale 16 gennaio 1996.*

Occorre inoltre tenere presente la normativa per le costruzioni in zona sismica, nella quale sono anche riportate alcune regole specifiche per le costruzioni in c.a.:

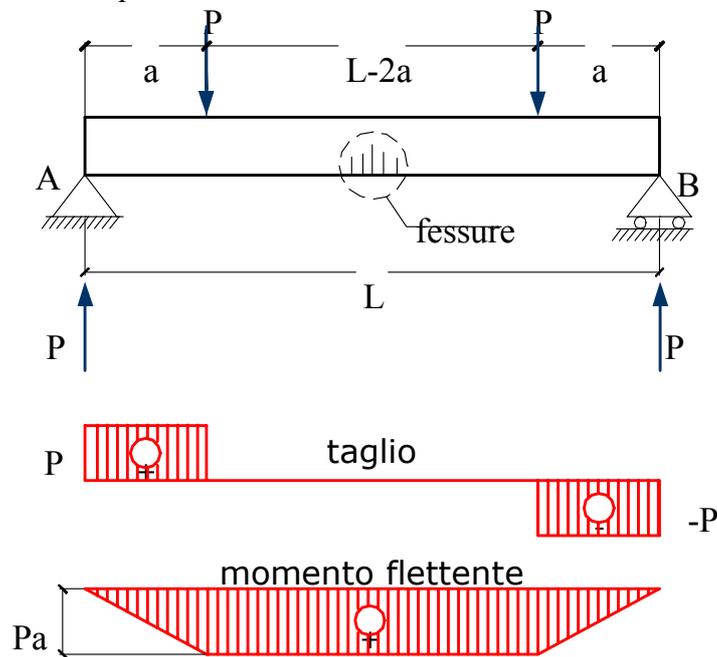
- D.M. LL.PP. del 16/01/1996 “*Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche*”;
- Circolare Min. LL.PP. del 10/04/1997 n. 65/AA.GG. - *Istruzioni per l’applicazione delle “Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche” di cui al Decreto Ministeriale 16 gennaio 1996.*

È infine da ricordare che, con l’avvento di Normative unificate a livello Europeo (i cosiddetti Eurocodici), è possibile ricorrere anche all’utilizzo di tali prescrizioni nel progetto delle strutture. In particolare, per quanto riguarda il cemento armato, si fa riferimento all’Eurocodice 2 (contraddistinto dalla sigla UNI ENV 1992-1-1, spesso citato semplicemente come EC2), nella parte 1-1 (Regole generali e regole per gli edifici); il già citato D.M. LL.PP. del 09/01/1996 “*Norme tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche*” riporta (nella sezione III) una serie di “*prescrizioni sostitutive, integrative o soppressive*” rispetto a quanto riportato nell’EC2, alle quali è obbligatorio attenersi per le strutture da realizzarsi in Italia.

Stati limite nel cemento armato

Analisi del comportamento di una trave inflessa

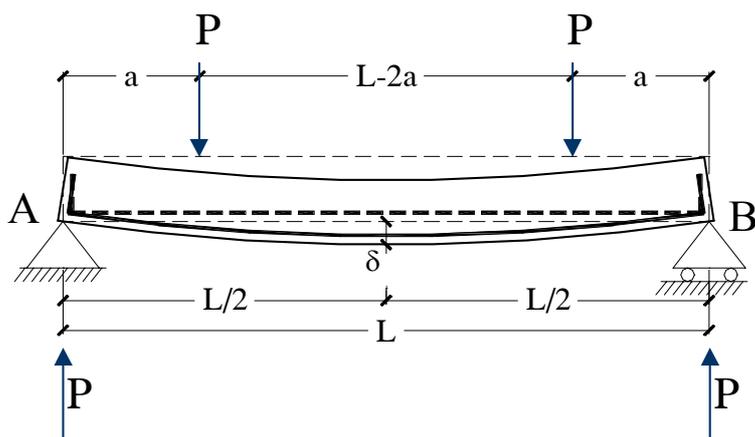
Per introdurre la teoria statica del cemento armato, si consideri una trave di solo calcestruzzo semplicemente appoggiata agli estremi e soggetta a due carichi concentrati P posti a distanza a dagli appoggi. Per valori bassi di P , la trave si comporta come se fosse costituita da materiale omogeneo, isotropo ed elastico. Al crescere del carico, essendo la resistenza a compressione del cls molto maggiore di quella a trazione, si verifica la rottura delle fibre inferiori della sezione di mezzeria (dove M è massimo) per cedimento del calcestruzzo teso, mentre il calcestruzzo compresso è ancora molto lontano dalla resistenza a compressione.



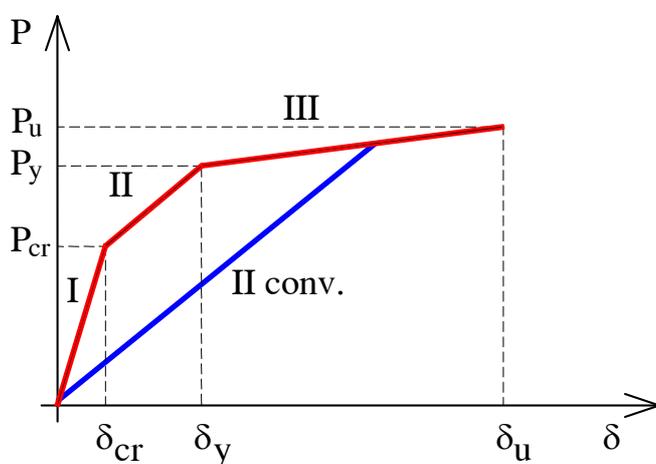
In una trave di solo calcestruzzo non è pertanto possibile sfruttare il calcestruzzo compresso fino alla sua resistenza massima a causa della rottura anticipata del calcestruzzo teso.

Nasce allora l'idea di introdurre dei tondini di ferro nelle zone tese della trave, i quali assorbendo le tensioni di trazione, una volta che il calcestruzzo si è fessurato, consentono alla trave di sopportare valori di q superiori a quello di fessurazione, ed in funzione del quantitativo di armatura introdotto, fino al raggiungimento della resistenza a compressione del cls.

Si voglia ora descrivere il comportamento della trave in presenza delle armature nella parte inferiore.



Al crescere del carico P si registri lo spostamento verticale δ della sezione di mezzeria al variare di P e si riportino su un diagramma i valori di δ sull'asse delle ascisse e quelli di P sull'asse delle ordinate:



La curva risulta formata sostanzialmente da tre rami, che definiscono altrettante “fasi” di comportamento della trave in c.a.:

- | | | |
|----------|--------------------------|--|
| ramo I | $P \leq P_{cr}$ | il calcestruzzo e l'acciaio resistono entrambi a trazione e sono con buona approssimazione in campo elastico lineare |
| ramo II | $P_{cr} \leq P \leq P_y$ | viene superata la resistenza a trazione del calcestruzzo, che si fessura (il pedice <i>cr</i> sta per “ <i>cracking</i> ” = fessurazione), e le trazioni sono assorbite solo dall'acciaio |
| ramo III | $P > P_y$ | si supera la tensione di snervamento dell'acciaio che subisce notevoli allungamenti fino a giungere a rottura (può anche succedere che si rompa il calcestruzzo compresso, se il quantitativo di armatura non è sufficientemente alto) |

Molto spesso le fasi I e II vengono approssimate pensando, a favore di sicurezza, che il cemento armato si comporti, fin da valori molto piccoli del carico, come se fosse già fessurato, individuando quindi una fase che può essere denominata come “fase II convenzionale” (la retta che definisce tale ramo è quindi parallela alla retta del ramo II ma parte dall'origine).

Le ragioni di tale modo di procedere (oltre alla maggiore facilità di calcolo, in quanto ad un diagramma bilineare, e quindi complessivamente non lineare, si sostituisce un legame carico-spostamento di natura lineare) va ricercata nell'osservazione che il calcestruzzo può comunque presentarsi già in condizioni fessurate anche al momento dell'applicazione del carico di progetto: questa circostanza è effettivamente molto spesso vera, in quanto possono esserci presenti fessure nel calcestruzzo a causa di altri effetti, quali ad esempio il ritiro (che accompagna sempre il fenomeno

della presa del calcestruzzo) che generalmente conduce ad un sistema di microfessure che ne compromettono, già per carichi esigui, la resistenza a trazione.

La fase II convenzionale è quella usualmente impiegata nel calcolo secondo il metodo delle tensioni ammissibili e, come verrà illustrato nel seguito, anche nel controllo delle tensioni in esercizio.

Per lo studio del comportamento delle travi inflesse e per la verifica delle sezioni in c.a. si utilizza il modello di comportamento in fase III (a rottura) ogni volta in cui si debba far riferimento a situazioni “ultime”; i modelli di comportamento in fase I + fase II (o, alternativamente, in fase II convenzionale) si utilizzano invece quando si faccia riferimento a condizioni di “esercizio” per la struttura in esame.

Individuazione degli Stati Limite nel c.a.

Nell’ottica del metodo degli Stati Limite, si individuano, per il cemento armato, situazioni diverse che possono comportare la crisi od il cattivo utilizzo in esercizio della struttura.

Le attuali normative impongono di conseguenza il controllo della struttura e delle sezioni maggiormente sollecitate in corrispondenza del raggiungimento delle seguenti condizioni:

STATI LIMITE ULTIMI (SLU)

verifica allo stato limite per tensioni normali: la verifica viene effettuata in termini di confronto tra enti sollecitanti valutato allo SLU e resistenza della sezione nella condizioni individuata di “collasso”, limitando l’attenzione alle sole sollecitazioni che producono tensioni normali (quindi sforzo normale e flessione)

verifica allo stato limite per sollecitazioni taglianti: si effettua la verifica attraverso il confronto tra V_{sdu} (taglio sollecitante allo SLU) e V_{rd} (taglio resistente della sezione)

verifica allo stato limite per sollecitazioni torcenti: analogamente al caso visto in precedenza, si controlla che T_{sdu} (momento torcente sollecitante allo SLU) risulti inferiore a T_{rd} (massimo momento torcente assorbibile dalla sezione)

verifica allo stato limite ultimo per sollecitazioni composte: vengono presi in esame i casi in cui si abbia contemporaneamente torsione, flessione e sforzo normale, oppure nel caso in cui siano presenti sia sollecitazioni di taglio sia sollecitazioni di torsione.

STATI LIMITE DI ESERCIZIO (SLE)

verifica allo stato limite per fessurazione: si controlla che non si formino fessure nel c.a. (verifica più gravosa) oppure che, se formatesi, queste non superino un valore di ampiezza prestabilito, in funzione della vulnerabilità della struttura e dell’impiego della stessa;

verifica allo stato di limite delle tensioni di esercizio: si considerano i valori delle tensioni nel calcestruzzo e nell’acciaio nelle condizioni di esercizio della struttura, imponendo il non superamento di limiti prestabiliti;

verifica allo stato limite di deformazione: consiste nel controllo delle deformazioni della struttura in condizioni di esercizio, in modo da verificare che essa sia compatibile con la funzionalità dell’opera e che non comporti danni alle sovrastrutture adiacenti.

Legami costitutivi allo Stato Limite Ultimo

Allo SLU si ipotizza, essendo le condizioni prossime a quelle di rottura, di analizzare il comportamento della sezione in fase III, ossia con calcestruzzo teso interamente fessurato, con il superamento del limite elastico sia per il calcestruzzo compresso che per l’acciaio teso.

Superato il limite elastico, per entrambi i materiali si considerano comportamenti di tipo “plastico” ossia in cui siano possibili incrementi di deformazioni anche in assenza di incrementi nello stato tensionale.

Calcestruzzo

La definizione di un modello di comportamento per il calcestruzzo in condizioni prossime a quelle di rottura può avvenire analizzando quello che accade in una prova di compressione semplice.

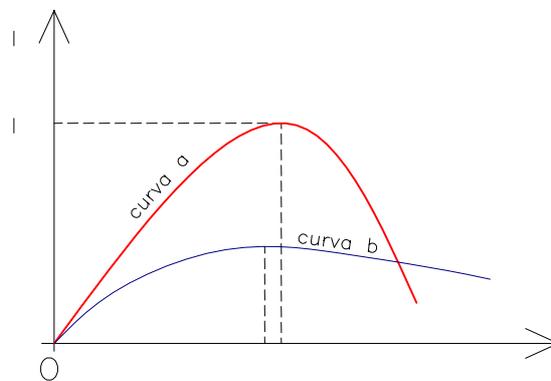
La prova consiste nel sottoporre un provino prismatico o cilindrico di calcestruzzo ad uno sforzo di compressione centrato; tale prova viene eseguita su provini di dimensioni standard ad una prefissata velocità di deformazione.

Se con A_n si indica l'area nominale del provino e con P lo sforzo assiale applicato, si possono definire come per la prova di trazione le due seguenti grandezze:

$$\sigma_n = \frac{P}{A_n} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

che sono dette rispettivamente *tensione nominale* (σ_n) e *deformazione convenzionale* (ε).

Se al crescere del carico si riportano i valori σ_n sull'asse delle ordinate e quelli delle ε sull'asse delle ascisse si ottiene una curva del tipo di quelle rappresentate nella figura seguente. In particolare per un calcestruzzo ad alta resistenza si ottiene la *curva a*, mentre per un calcestruzzo di normale resistenza si ha la *curva b*.



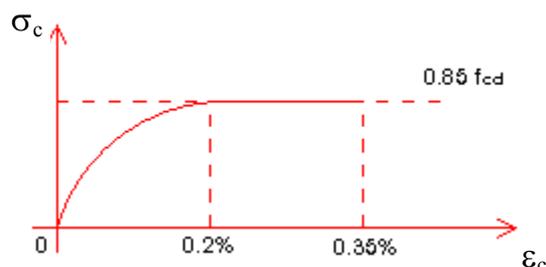
Per convenzione la curva è stata tracciata assumendo positive le tensioni e le deformazioni di compressione.

In generale si nota:

- un comportamento non lineare anche per livelli bassi di tensione (ossia anche per tensioni notevolmente inferiori rispetto a quelle che provocano la rottura del provino): il livello tensionale massimo al di sotto del quale il comportamento del calcestruzzo compresso può ritenersi elastico lineare è pari a circa il 30% della resistenza di picco;
- il raggiungimento della tensione di picco per una deformazione pari a circa lo 0.2 % (2‰), valore più o meno indipendente dalla resistenza del calcestruzzo;
- la presenza di un comportamento così detto di tipo “softening” una volta raggiunta la tensione di picco: il materiale cioè non è in grado di assorbire deformazioni maggiori di quella di picco se non attraverso una riduzione dello stato tensionale.

Se sottoposto a trazione il calcestruzzo manifesta una rottura fragile per un valore molto basso dello sforzo di trazione, pertanto nelle verifiche di resistenza, la resistenza a trazione del calcestruzzo viene trascurata. Il diagramma σ - ε è così limitato alle sole tensioni e deformazioni di compressione.

Nel calcolo agli Stati Limite, concentrando l'attenzione alla valutazione della sicurezza nei confronti dello Stato Limite Ultimo, il legame tensioni-deformazione convenzionale che viene adottato è riportato nella figura seguente.



Il diagramma ha un andamento parabolico fino alla deformazione del 2‰, presentando poi un andamento perfettamente plastico fino alla deformazione a rottura fissata convenzionalmente al 3.5‰. Il diagramma è in sostanziale accordo con i risultati sperimentali, ed il valore assunto come massima contrazione risente della difficoltà nel definire correttamente, a causa del fatto che il materiale esibisce una curva che a rottura tende ad abbassare la propria pendenza, il valore della deformazione corrispondente alla rottura. Dai risultati sperimentali si ricavano comunque valori nell'intervallo 3.4‰÷8.0‰, per cui il valore assunto risulta cautelativo.

La massima tensione viene valutata a partire dalla resistenza cilindrica di progetto, quindi da

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{\gamma_c}$$

dove γ_c , coefficiente parziale di sicurezza allo SLU, viene assunto per il calcestruzzo pari a 1.6.

In realtà il livello massimo riportato nel diagramma tiene conto del fatto che la tensione caratteristica di rottura rappresenta una tensione istantanea, in quanto ricavata da prove di schiacciamento su provini. Gli aspetti non lineari insiti nel comportamento del calcestruzzo suggeriscono di ridurre tale valore ad uno inferiore che può essere ritenuto accettabile anche a tempo infinito, ossia un valore prudenziale che tenga conto dell'invecchiamento del calcestruzzo. Di conseguenza si adotta una riduzione del 15% della tensione di progetto come valutata a partire da prove istantanee.

La parabola che rappresenta il comportamento del calcestruzzo per deformazioni inferiori al 2‰ è definita dalle seguenti tre proprietà:

- passaggio dall'origine del diagramma;
- valore pari a $0.85 \cdot f_{cd}$ in corrispondenza della deformazione $\varepsilon = 2\text{‰}$, nel seguito indicata per brevità con ε_0 ;
- tangente orizzontale in corrispondenza del valore ε_0 .

Quindi l'equazione della parabola risulta essere:

$$f = a \cdot \varepsilon^2 + b \cdot \varepsilon + c \quad \begin{cases} \text{per } \varepsilon = 0 : f = 0 & c = 0 \\ \text{per } \varepsilon = \varepsilon_0 : f = 0.85 \cdot f_{cd} & a \cdot \varepsilon_0^2 + b \cdot \varepsilon_0 = 0.85 \cdot f_{cd} \\ \text{per } \varepsilon = \varepsilon_0 : f' = 0 & 2 \cdot a \cdot \varepsilon_0 + b = 0 \end{cases}$$

da cui

$$a = -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{\varepsilon_0^2}, \quad b = \frac{2 \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}{\varepsilon_0}, \quad c = 0$$

e quindi

$$f = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

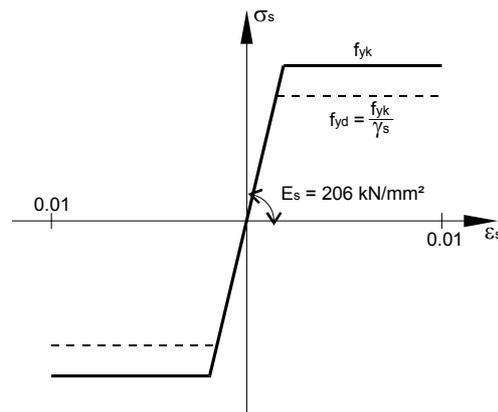
La tangente all'origine alla parabola (che corrisponde al valore di b) interseca la massima ordinata $0.85 \cdot f_{cd}$ al valore $\varepsilon_0/2 = 1\text{‰}$.

Nella seguente tabella sono riportati valori delle resistenze di progetto che si utilizzano nel calcolo a rottura dei calcestruzzi di uso più comune:

R_{ck} [N/mm ²]	Denominaz.	f_{ck} [N/mm ²]	f_{cd} [N/mm ²]	$0.85 \cdot f_{cd}$ [N/mm ²]
25	C20/25	20.75	12.97	11.02
30	C25/30	24.90	15.56	13.23
35	C30/35	29.05	18.16	15.43

Acciaio

Per l'acciaio viene usualmente impiegato un legame costitutivo elasto-plastico. Si suppone cioè che, superato il limite elastico, si possa attribuire all'acciaio un comportamento perfettamente plastico, cioè siano possibili incrementi di deformazione a tensione costante, fino al raggiungimento del limite convenzionale di deformazione a rottura.



Il limite convenzionale di deformazione a rottura è fissato nella misura del 10%; osservando i valori effettivi dell'allungamento a rottura delle barre di acciaio si nota un limite sensibilmente superiore (di almeno 10 volte). L'esigenza di limitare la deformazione massima a valori così bassi nasce dalla necessità di mantenere l'aderenza tra acciaio (soprattutto teso) e calcestruzzo, alla base dei metodi di calcolo che verranno illustrati in seguito. Se infatti si attingesse a deformazioni elevate nell'acciaio, l'effetto di contrazione trasversale (o strizione, prodotto per valori sensibili dell'allungamento dal coefficiente di Poisson) tenderebbe a ridurre l'area dell'acciaio, contraendolo, e quindi favorendone lo "sfilamento" dal calcestruzzo circostante.

Il valore massimo nell'ordinata del diagramma è offerto dalla tensione di progetto dell'acciaio,

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

dove γ_s , coefficiente parziale di sicurezza allo SLU, viene assunto per l'acciaio pari a 1.15.

Legami costitutivi nelle verifiche agli Stati Limite di Esercizio

In condizioni di esercizio si suppone, per entrambi i materiali, un comportamento in campo elastico lineare. A seconda della verifiche che vengono effettuate, il calcolo procede con l'analisi dello sviluppo del comportamento dalla fase I alla fase II oppure, in alcuni casi, considerando soltanto la fase II convenzionale.

In entrambi i casi, si assume per il calcestruzzo un comportamento elastico lineare con un valore del modulo elastico crescente in funzione della classe del materiale, convenzionalmente pari a

$$E_c = 5700 \cdot \sqrt{R_{ck}} \quad (\text{N/mm}^2) \quad E_c = 18000 \cdot \sqrt{R_{ck}} \quad (\text{kg/cm}^2)$$

Per l'acciaio il valore del modulo elastico viene fissato in

$$E_s = 206000 \quad \text{N/mm}^2 \quad (\text{MPa}) = 206 \text{ GPa}$$

In fase II (superata quindi la resistenza a trazione del calcestruzzo) e in fase II convenzionale, il calcolo viene condotto introducendo il coefficiente di omogeneizzazione, indicato con la lettera n (o m in alcuni testi).

Coefficiente di omogeneizzazione (n)

Nel cosiddetto “metodo n ” (utilizzando anche se si operasse con il metodo delle tensioni ammissibili) le verifiche di resistenza delle sezioni vengono eseguite con riferimento al solo calcestruzzo, riducendo le aree delle barre di acciaio ad aree di calcestruzzo equivalente attraverso un opportuno coefficiente di omogeneizzazione, indicato con il simbolo n .

Questo modo di procedere è giustificato dal fatto che, una volta trascurato il contributo del calcestruzzo teso, si ipotizza la perfetta aderenza tra le barre di acciaio ed il calcestruzzo circostante e la validità della legge di conservazione delle sezioni piane come per le travi di materiale omogeneo ed isotropo (ipotesi di Bernoulli-Navier).

Di conseguenza, avendo ipotizzato la validità della legge di Hooke per entrambi i materiali, valgono le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a} \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

inoltre per l'ipotesi di perfetta aderenza risulta:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_a$$

quindi sostituendo in quest'ultima relazione le due precedenti, si giunge alla seguente espressione

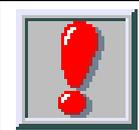
$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

da cui

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_c} \sigma_c = n \sigma_c$$

dove si è posto

$$n = \frac{E_a}{E_c}$$



A parità di deformazione la tensione nell'acciaio risulta n volte maggiore di quella nel calcestruzzo, dove il coefficiente n (spesso, in alcuni testi, indicato anche con m) è detto **coefficiente di omogeneizzazione** ed è dato dal rapporto tra il modulo di elasticità dell'acciaio e quello del calcestruzzo.

Omogeneizzazione della sezione

Si consideri un elemento verticale prismatico in c.a., di sezione A_c , contenente un solo tondino di area A_a in posizione centrale.

Si applichi all'elemento un carico assiale F diretto verso il basso. Si indichi con ε la deformazione unitaria in una sezione A-A sufficientemente lontana dalla sezione di applicazione del carico, in modo che in essa sia soddisfatta l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Questa deformazione è identica per il calcestruzzo e per l'acciaio per l'ipotesi di perfetta aderenza dei due materiali.

Ad ε corrispondono una forza F_c nel calcestruzzo e una forza F_a nell'acciaio

$$F_c = A_c \cdot E_c \cdot \varepsilon = A_c \cdot \sigma_c$$

$$F_a = A_a \cdot E_a \cdot \varepsilon = A_a \cdot \sigma_a = A_a \cdot n \cdot \sigma_c$$

La somma delle due forze deve essere pari, per equilibrio, all'azione esterna F applicata, per cui si ottiene

$$F = F_c + F_a = A_c \cdot \sigma_c + A_a \cdot n \cdot \sigma_c = \sigma_c \cdot (A_c + n \cdot A_a)$$

Alla luce di quanto detto, si può pertanto affermare che:

- ai fini della resistenza a compressione un'area A_a di acciaio è equivalente ad un'area di calcestruzzo n volte più grande
- una sezione di c.a. può essere considerata come una sezione omogenea in cls, di area equivalente ideale A_{ci} pari alla somma dell'area di calcestruzzo compresso e dell'area di acciaio moltiplicata per n :

$$A_{ci} = A_c + nA_a$$

Quanto vale n ?

Si voglia determinare il valore del coefficiente di omogeneizzazione n . Si supponga di avere un calcestruzzo di classe R_{ck} 30; utilizzando la formula fornita dalla normativa il suo modulo di elasticità istantanea all'origine è pari a:

$$E_c = 5700 \cdot \sqrt{R_{ck}} = 5700 \cdot \sqrt{30} = 31220 \text{ N/mm}^2$$

il modulo di elasticità dell'acciaio è pari a 206000 N/mm^2 , pertanto n assume il seguente valore:

$$n = \frac{206000}{31220} = 6.60 \cong 7$$

Se il carico applicato sull'elemento in c.a. è di lunga durata, da quanto esposto nei capitoli precedenti, risulta che esso induce deformazioni viscosi, la cui entità è circa il doppio della deformazione elastica iniziale.

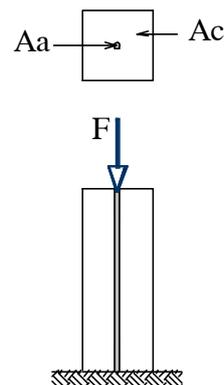
Pertanto nei confronti dei carichi di lunga durata, il calcestruzzo si comporta come se avesse un modulo di elasticità fittizio pari a circa $1/3$ di quello iniziale.

Sempre con riferimento a un calcestruzzo con $R_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$ il coefficiente di omogeneizzazione per carichi di lunga durata è pari a:

$$n_\infty = \frac{206000}{\frac{31220}{3}} = 19.80 \cong 20$$

Per n occorrerebbe adottare pertanto due valori diversi a seconda che si considerino carichi di breve o di lunga durata.

Inoltre i valori di n cambiano in funzione della classe di resistenza del calcestruzzo, perché con essa cambia il modulo di elasticità del calcestruzzo.



Poiché sulle strutture in c.a. generalmente si ha la presenza contemporanea di carichi istantanei e di carichi permanenti, si preferisce in genere definire un unico valore di n .

Normalmente si utilizza un valore di n pari a 15, indipendentemente dalla classe di resistenza del cls, e rappresenta un valore intermedio tra quello per carichi istantanei e quello per carichi permanenti.

La Normativa, nel paragrafo relativo alla verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio (par. 4.3.2.1 del DM 9.1.96), riporta che “*in via semplificativa si può assumere il comportamento elastico-lineare (per il calcestruzzo) e per le armature il coefficiente di omogeneizzazione con il valore convenzionale $n=15$* ”.

Operando secondo il metodo delle tensioni ammissibili, sempre la Normativa vigente indica che si può assumere “*come area della sezione resistente quella corrispondente al conglomerato compresso ed alle aree metalliche tese e compresse affette dal coefficiente convenzionale di omogeneizzazione $n=15$* ” (p.to 3.1.1 del DM 14.2.92).

La resistenza a trazione del calcestruzzo

Nel caso in cui la verifica venga effettuata considerando anche la fase I nel comportamento della sezione in c.a., occorre definire una resistenza a trazione per il calcestruzzo.

La Normativa individua due diversi valori per tale grandezza: il primo (indicato con f_{ct}) è riferito alla resistenza a trazione semplice, mentre il secondo fa riferimento alla resistenza a trazione per flessione ed è indicato con f_{ctf} , ossia a tutte quelle condizioni in cui la trazione nel calcestruzzo è indotta dalla presenza di momenti flettenti.

Convenzionalmente si individua il valore medio (pedice m) di f_{ct} nella quantità

$$f_{ctm} = 0.27 \cdot \sqrt[3]{R_{ck}^2} \quad (\text{N/mm}^2) = 0.27 \cdot R_{ck}^{2/3} \quad (\text{N/mm}^2)$$

Mentre i valori caratteristici corrispondenti ai frattili 5% e 95% possono assumersi rispettivamente pari a $0.7 \cdot f_{ctm}$ e $1.3 \cdot f_{ctm}$. Il valore a cui si fa riferimento nelle verifiche è di solito quello corrispondente al frattile inferiore, ossia

$$f_{ctk} = 0.7 \cdot f_{ctm}$$

La resistenza a flessione è generalmente assunta pari a

$$f_{ctfm} = 1.2 \cdot f_{ctm}$$

Nella seguente tabella sono riportati valori delle resistenze a trazione che si utilizzano nel calcolo in fase I nei calcestruzzi di uso più comune:

R_{ck} [N/mm ²]	Denominaz.	f_{ctm} [N/mm ²]	f_{ctk} [N/mm ²]	f_{ctfk} [N/mm ²]	f_{ck}/f_{ctk}
25	C20/25	2.31	1.62	1.94	12.8
30	C25/30	2.61	1.83	2.19	13.6
35	C30/35	2.89	2.02	2.43	14.4

Come si può osservare, la resistenza a trazione del calcestruzzo è pari mediamente a circa 1/13 della resistenza a compressione.

Stati limite nel cemento armato

Stato limite ultimo per tensioni normali

Determinazione delle configurazioni di rottura per la sezione

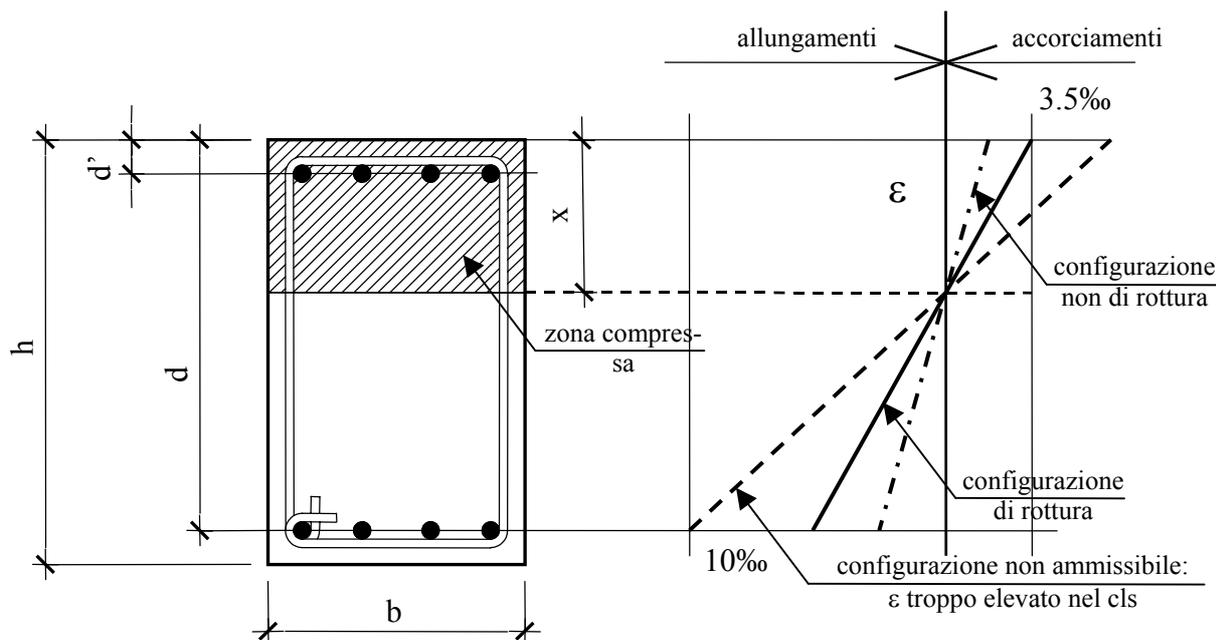
Una volta introdotti i legami costitutivi, è possibile determinare le situazioni per le quali una generica sezione in cemento armato raggiunge, in uno o in entrambi i componenti calcestruzzo e acciaio, le condizioni di rottura, ossia le condizioni “ultime”.

Le ipotesi principali alla base del calcolo (che si adottano, come verrà illustrato nel seguito) anche nel caso di calcolo con legami tensione-deformazione di tipo lineare (ad esempio nella valutazione della sicurezza nei confronti degli Stati Limite di Esercizio) sono le tre seguenti:

1. si trascura il contributo del calcestruzzo soggetto a trazione (che però interviene nella trasmissione degli sforzi di scorrimento attraverso il meccanismo a traliccio che verrà descritto nella lezione dedicata al taglio);
2. si ipotizza perfetta aderenza tra le barre di acciaio ed il calcestruzzo circostante (anche in ragione del fatto di avere limitato la massima deformazione dell'acciaio al valore del 10‰);
3. si ipotizza la conservazione delle sezioni piane come per le travi di materiale omogeneo ed isotropo (ipotesi di Bernoulli-Navier).

Prima di illustrare il procedimento al calcolo è bene evidenziare alcuni aspetti:

- la rottura della sezione può giungere per il raggiungimento della deformazione limite nel calcestruzzo compresso (ossia perché la fibra più esterna di calcestruzzo raggiunge la deformazione limite del 3.5‰) oppure per il raggiungimento della massima dilatazione nell'acciaio teso (corrispondente al valore di deformazione 10‰)
 - è evidente che non si può raggiungere una condizione di rottura per massima contrazione dell'acciaio compresso, in quanto, essendo quest'ultimo perfettamente aderente al calcestruzzo nella stessa zona, non si potrà mai superare il limite del 3.5‰ imposto alla fibra di cls
 - operando in campo elasto-plastico, occorre impostare il problema della determinazione delle situazioni di rottura della sezione operando in termini di deformazioni e non di tensioni: risulta infatti chiaro che mentre ad un valore della deformazione corrisponde un solo valore della tensione, non è vero il viceversa, a causa della presenza di un ramo plastico
 - una volta individuata una configurazione di rottura (in termini di deformazioni) si risalirà al valore delle tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio e quindi alle risultanti di compressione e trazione; infine, sarà possibile esprimere la condizione di rottura in termine di coppia di valori di sforzo normale e momento flettente (individuati nel seguito rispettivamente con N_{rd} e M_{rd}) che costituiranno la coppia di sollecitazioni che, se agenti contemporaneamente nella sezione, comportano la rottura della sezione
 - ad ogni configurazione di rottura corrisponde un preciso valore della rotazione della sezione e sussiste una corrispondenza biunivoca tra le configurazioni di rottura e la profondità dell'asse neutro, come risulta dalla figura seguente: fissata la posizione dell'asse neutro, si determina univocamente la configurazione di rottura, in quanto ogni altra configurazione deformata della sezione comporterebbe il superamento della massima deformazione ammissibile in uno dei due materiali che costituiscono la sezione
-



- nel caso di sezione uniformemente compressa (ossia in cui le deformazioni sono costanti su tutta la sezione) si assume convenzionalmente un valore massimo della deformazione per il calcestruzzo pari al 2‰; per tutte le configurazioni di sezione interamente compressa (quindi con asse neutro esterno alla sezione e tensioni tutte di compressione) si individua la rottura considerando la “deformazione massima del calcestruzzo compresso pari a 3.5‰ nel caso di flessione semplice e composta con asse neutro reale, e variabile dal valore predetto al 2‰ quando l’asse neutro, esterno alla sezione, tende all’infinito” (p.to 4.2.1.1 del DM 16.1.96)

Il dominio resistente della sezione

L’insieme delle coppie (N_{rd} , M_{rd}) che costituiscono situazioni di rottura per la sezione, rappresentano la frontiera di un dominio che, nel piano (N, M), delimita la zona “sicura” di utilizzo della sezione (punti interni al dominio al massimo sul dominio) rispetto a punti in cui la sezione non risulterebbe verificata (punti esterni alla frontiera del dominio).

Il dominio resistente viene quindi costruito per punti, utilizzando quanto descritto nel paragrafo precedente, e considerando la possibilità che la zona compressa sia nella parte superiore della sezione (momento positivo, secondo la convenzione che viene usualmente utilizzata) oppure nella parte inferiore della sezione (momento negativo).

In termini di rappresentazione, il dominio resistente viene riportato in un piano cartesiano in cui si individua sulle ascisse il valore dello sforzo normale N (nel c.a. di solito rappresentato come positivo se di compressione, quindi con segno opposto rispetto all’usuale convenzione della scienza delle costruzioni) e sulle ordinate il valore del momento flettente M (come già detto, normalmente positivo se risulta compressa la parte superiore della sezione).

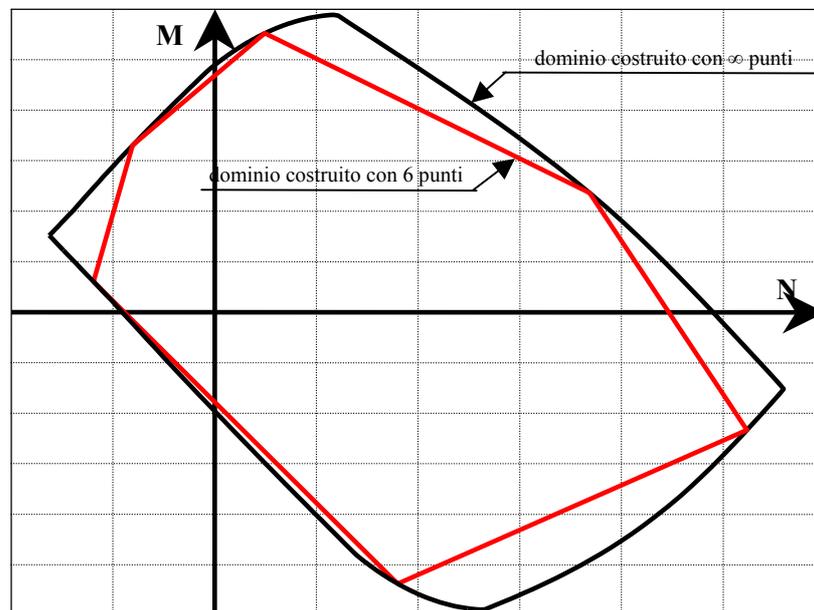
Il dominio resistente è un dominio convesso, e questo a causa di alcune proprietà della superficie di plasticizzazione (che non verranno qui illustrate e per le quali si rimanda ad altra sede).

Tra le varie definizioni di convessità che potrebbero essere utilizzate, in questa sede si ricorda soltanto che “in una superficie convessa qualunque segmento che unisce due punti interni o sulla frontiera della superficie è completamente contenuto all’interno della superficie stessa”.

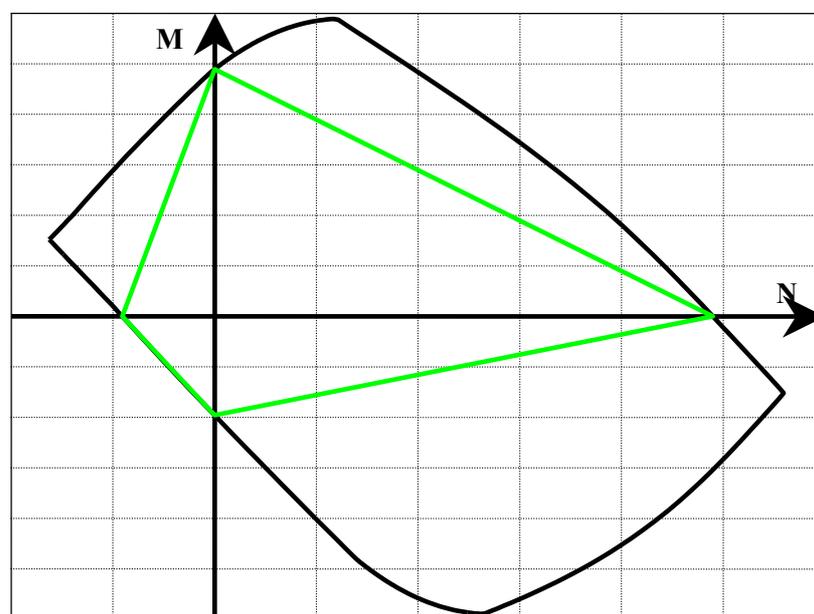
Tale proprietà comporta alcuni vantaggi operativi non indifferenti:

- il dominio potrebbe essere teoricamente costruito con un numero infinito di punti, ossia per tutte le possibili posizioni dell’asse neutro variabili tra $-\infty$ (per le convenzioni adottate, sezione uni-

formemente tesa) e $+\infty$ (sezione uniformemente compressa); se tuttavia tale dominio viene costruito mediante un insieme finito di punti, anche abbastanza limitato, quello che si ottiene rappresenta sicuramente un'approssimazione dalla parte della sicurezza del dominio reale, in quanto tale nuovo dominio è senz'altro contenuto all'interno del precedente



- se si conoscessero i punti del dominio caratterizzati da un valore nullo di una delle due caratteristiche di sollecitazione, il dominio potrebbe, a favore di sicurezza, essere approssimato con un quadrilatero irregolare che unisce tali punti (come indicato al p.to B.5.1 della Circ. 15.10.96 a cui si farà riferimento in seguito)



Nel grafico seguente (tratto dalla Circ. esplicativa al DM 9.1.96) sono riportate tutte le possibili situazioni di rottura per una sezione in calcestruzzo armato.

Nel grafico si fa riferimento all'altezza h della sezione (altezza geometrica della sezione) ed all'altezza utile d ; quest'ultima grandezza rappresenta la distanza del baricentro dell'armatura dal lembo superiore, e differisce dall'altezza effettiva per qualche centimetro (di solito $h-d = 3\div 5$ cm). Vale infatti la relazione:

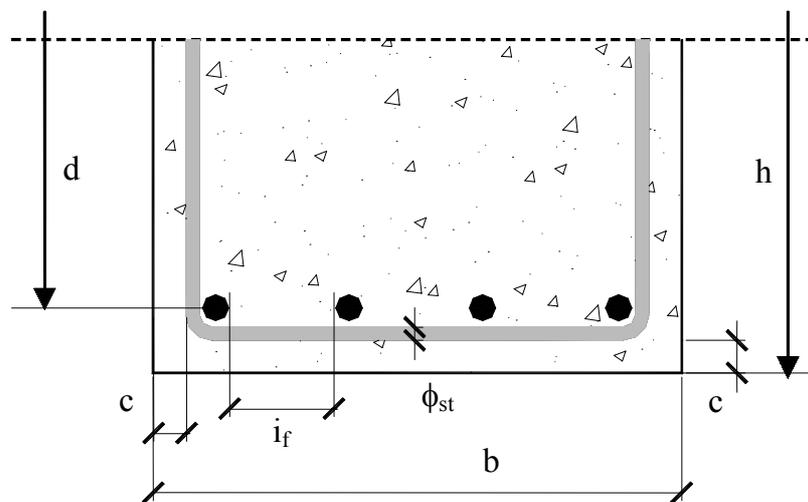
$$d = h - c - \phi_{st} - \frac{\phi}{2}$$

dove si evidenzia il fatto che dall'altezza geometrica si sottraggono le tre grandezze:

- ricoprimento d'armatura (c);
- il diametro delle (eventuali) staffe ϕ_{st} ;
- metà del diametro delle armature resistenti a flessione ($\phi/2$).

La prima (ricoprimento) rappresenta la minima distanza tra la superficie dell'armatura resistente e le facce esterne del conglomerato, ed è fissata per legge. Solitamente, nel caso delle travi, l'armatura resistente più esterna è offerta dalle staffe, necessarie, come si vedrà in seguito, per assorbire gli sforzi di taglio. Le armature longitudinali (ossia quelle resistenti a flessione) sono di solito collocate all'interno delle staffe, come mostrato in figura.

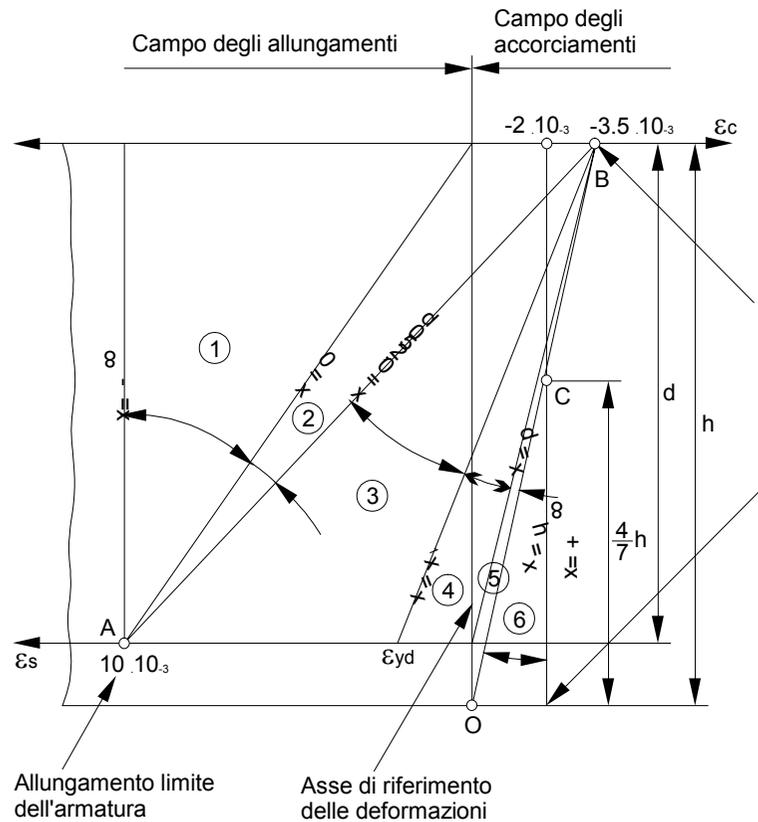
Il valore minimo del ricoprimento vale sia se misurato in orizzontale che in verticale, riguardando tutte le facce della sezione in c.a.



<p>Normativa</p> 	<p>La normativa prescrive i seguenti valori minimi per il valore del ricoprimento di armatura:</p> <ul style="list-style-type: none"> - per <u>solette, setti e pareti</u>: $c_{min}=0,8\text{ cm}$ per <u>travi e pilastri</u>: $c_{min}= 2,0\text{ cm}$ - le limitazioni precedenti salgono a 2 cm per solette, setti e pareti, e a 4 cm per travi e pilastri, in presenza di salsedine marina, di emanazioni nocive o in ambiente comunque aggressivo - le superfici delle barre devono essere mutuamente distanziate in ogni direzione di almeno una volta il diametro delle barre medesime e, in ogni caso, non meno di 2 cm (interfero minimo: 2 cm)
--	--

La differenza tra h e d è spesso indicata come copriferro, frequentemente confuso, in maniera erronea, con il valore del ricoprimento di armatura.

La limitazione imposta al valore dell'interfero (indicato con i_f nella figura) è dovuta all'esigenza di permettere al calcestruzzo di fluire, al momento del getto, nella zona che costituirà poi il ricoprimento delle armature.



I ed di ni it ne na dr occ A
ozzi sed ac

	DEFORMAZIONI SPECIFICHE		TIPO DI SOLLECITAZIONE	TIPO DI ROTTURA
	ACCIAIO	CALCESTRUZZO		
$x = -\infty$				
①	10‰	--	TRAZIONE SEMPLICE O COMPOSTA	MASSIMA DEFORMAZIONE ACCIAIO TESO
$x = 0$				
②	10‰	$0 \leq \epsilon_c \leq 3,5\%$	FLESSIONE SEMPLICE O COMPOSTA	MASSIMA DEFORMAZIONE ACCIAIO TESO
$x = 0,250 d$				
③	$10\text{‰} < \epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$	3,5‰	FLESSIONE SEMPLICE O COMPOSTA	SNERVAMENTO ACCIAIO E SCHIACCIAMENTO CALCESTRUZZO
$x = x_1$				
④	$\epsilon_{yd} < \epsilon_s \leq 0$	3,5‰	FLESSIONE SEMPLICE O COMPOSTA	SCHIACCIAMENTO CALCESTRUZZO
$x = d$				
⑤	$(\epsilon_s < 0)$	3,5‰	FLESSIONE COMPOSTA	SCHIACCIAMENTO CALCESTRUZZO
$x = h$				
⑥	$(\epsilon_s < 0)$	$2\text{‰} \leq \epsilon_c \leq 3,5\%$	COMPRESSIONE SEMPLICE O COMPOSTA	SCHIACCIAMENTO CALCESTRUZZO E SNERVAMENTO ACCIAIO COMPRESSO
$x = +\infty$				

Come si può notare, nel grafico sono riportate sia le possibili posizioni dell'asse neutro (da $-\infty$, sezione uniformemente tesa, a $+\infty$, sezione uniformemente compressa) sia le corrispondenti configurazioni "deformate" della sezione in condizioni di rottura. Si possono individuare tre zone:

- condizioni di rottura per massima deformazione nell'acciaio teso (in sintesi "rottura lato acciaio"): sono le zone (1) e (2) del diagramma, in cui l'acciaio teso attinge alla massima deformazione del 10‰ mentre il calcestruzzo si trova in condizioni di deformazione inferiori rispetto a quella ultima; tutte le possibili configurazioni di rottura si ottengono disegnando rette che partono dal polo A, e l'asse neutro si trova all'interno dell'intervallo $(-\infty \div 0.259 \cdot d]$ (il valore del limite superiore verrà ricavato nel seguito);
- condizioni di rottura per massima deformazione nel calcestruzzo compresso (in sintesi "rottura lato calcestruzzo"), zone (3), (4) e (5) del diagramma: il calcestruzzo nella fibra più esterna si trova al valore massimo consentito di deformazione (3.5‰), mentre l'acciaio teso attinge a deformazioni inferiori al 10‰; le possibili configurazioni di rottura si ottengono disegnando rette che partono dal polo B, e l'asse neutro si trova all'interno dell'intervallo $[0.259 \cdot d \div h]$;
- condizioni di rottura per massima deformazione nel calcestruzzo compresso e sezione interamente compressa, zona (6) del diagramma: il calcestruzzo nella fibra più esterna si trova al valore massimo consentito di deformazione, che varia dal 3.5‰ (per asse neutro interno o al più al limite della sezione) al 2‰ nel caso di sezione uniformemente tesa; le possibili configurazioni di rottura si ottengono disegnando rette che partono dal polo C, e l'asse neutro si trova nell'intervallo $[h \div +\infty)$.

Si possono individuare due valori caratteristici che definiscono il diagramma: la profondità dell'asse neutro che corrisponde alla condizione di separazione tra la rottura "lato acciaio" e quella "lato calcestruzzo", e la posizione del polo C che viene utilizzata nel caso di condizioni di rottura per sezione interamente compressa.

La profondità dell'asse neutro nella condizione che separa le zone (2) e (3) può essere ricavata sfruttando la conservazione delle sezioni piane e la legge di similitudine dei triangoli; si ottiene quindi, indicando con x la profondità dell'asse neutro,

$$x : 0.0035 = (d - x) : 0.010 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3.5}{3.5 + 10.0} d = 0.259 \cdot d$$

Questa profondità dell'asse neutro a rottura caratterizza quella che si chiama "rottura bilanciata" della sezione, ossia l'unica posizione dell'asse neutro che consente il massimo sfruttamento della sezione in cemento armato, in quanto sia la fibra maggiormente compressa di cls sia l'armatura tesa attingono contemporaneamente al loro massimo valore di deformazione. Alla luce delle osservazioni fatte in precedenza, è evidente che esiste una sola configurazione di rottura (a parte quella corrispondente allo stesso calcolo ma con segno opposto del momento) che soddisfa tale proprietà.

La posizione del punto C può essere determinata ancora con considerazioni di similitudine dei triangoli, ricavando il valore della distanza y del lembo inferiore alla quale corrisponde (con deformazione del calcestruzzo alla fibra superiore pari al 3.5‰ e profondità dell'asse neutro uguale ad h) una deformazione pari al 2‰:

$$h : 0.0035 = x : 0.0020 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3.5} \cdot h = \frac{4}{7} \cdot h$$

Una volta individuate tutte le possibili condizioni di rottura, i valori delle coppie (N_{rdu} , M_{rdu}) che costituiscono il contorno del dominio resistente della sezione possono essere ricavati con semplici condizioni di equilibrio, come verrà illustrato nel seguito.

La Normativa in vigore impone due limitazioni aggiuntive nel caso di compressione o pressoflessione:

- la prima impone una limitazione sul massimo sforzo normale (di compressione) che può essere applicato alla sezione che deve risultare inferiore rispetto a quello calcolato per compressioni centrate, con una maggiorazione del 25% del coefficiente γ_c . Il valore dello sforzo normale mas-
-

simo si trova quindi riducendo la tensione massima del calcestruzzo attraverso l'introduzione di un valore di maggiorato di γ_c pari a

$$\bar{\gamma}_c = 1.25 \cdot \gamma_c = 1.25 \cdot 1.6 = 2.0$$

di conseguenza la tensione di progetto del calcestruzzo compresso attinge al valore ridotto

$$\bar{f}_{cd} = \frac{f_{ck}}{\bar{\gamma}_c} = \frac{f_{ck}}{2.0} = \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{2.0} = 0.415 \cdot R_{ck}$$

- inoltre, per tenere conto delle incertezze sul punto di applicazione dei carichi si deve ipotizzare una eccentricità (e), prevista nella direzione più sfavorevole, da sommare a quella eventuale dei carichi e di entità pari al maggiore dei due valori $h/30$ e 20 mm, essendo h la dimensione nella direzione considerata per la eccentricità; di fatto non è quindi possibile verificare una sezione semplicemente compressa, dovendo comunque essere tenuto in conto un momento flettente almeno pari a

$$M_{rd} = \pm N_{rd} \cdot e$$

dove il doppio segno indica che deve essere tenuto in conto nel verso più sfavorevole.

Determinazione delle sollecitazioni corrispondenti ad una generica configurazione di rottura

Una volta individuata una configurazione di rottura (in termini di deformazione) per la sezione, occorre risalire all'andamento delle tensioni e quindi delle caratteristiche di sollecitazione sull'intera sezione.

La risultante delle compressioni, lato calcestruzzo, può essere calcolata integrando, per l'intera profondità dell'asse neutro (o dell'altezza, se la sezione è interamente compressa e quindi con asse neutro esterno alla sezione) il diagramma delle tensioni. Nel caso generale si ottiene quindi

$$C = \int_0^x b(\xi) \cdot f_c(\xi) d\xi = \int_0^x b(\xi) \cdot f_c[\varepsilon(\xi)] d\xi$$

dove si è evidenziato il fatto che si risale ai valori della tensione attraverso i valori della deformazione (come già indicato, l'estremo superiore va limitato ad h , altezza della sezione, nel caso in cui x ricada nell'intervallo $[h; +\infty)$).

La risultante di compressione si trova ad una distanza x_c dall'asse neutro offerta dalla relazione

$$x_c = \frac{1}{C} \int_0^x b(\xi) \cdot f_c(\xi) \cdot \xi d\xi$$

che corrisponde all'usuale definizione di baricentro di una sezione.

Ipotizzando la presenza di un'armatura compressa A_s' a distanza d' dal lembo superiore ed un'armatura tesa A_s a distanza d dal lembo superiore, la risultante delle compressioni nell'armatura compressa ed in quella tesa rispettivamente valgono:

$$C' = A_s' \cdot f_s[\varepsilon_s'] = A_s' \cdot f_s[\varepsilon(d')] = A_s' \cdot f_s\left(\frac{x-d'}{x} \varepsilon_c\right)$$

$$T = A_s \cdot f_s[\varepsilon_s] = A_s \cdot f_s[\varepsilon(d)] = A_s \cdot f_s\left(\frac{d-x}{x} \varepsilon_c\right)$$

Nelle due relazioni precedenti si è fatto uso della relazione di linearità che lega tra loro, a causa della conservazione delle sezioni piane, le deformazioni a varie profondità nella sezione; con ε_c , ε_s' e ε_s si sono indicate rispettivamente le deformazioni al lembo maggiormente compresso della sezione, in corrispondenza delle armature compresse e in corrispondenza delle armature tese.

La determinazione della tensione delle armature, a causa della conformazione del legame tensione-deformazioni per l'acciaio, è abbastanza semplice, in quanto

$$f_s = \begin{cases} \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

Una volta ricavate le tre risultanti e la loro posizione, si possono facilmente determinare i valori delle caratteristiche di sollecitazione (cioè di N e M) alle quali esse danno luogo.

E' importante notare che, essendo in generale non nullo il valore dello sforzo normale, il valore del momento risultante dipende dal punto della sezione rispetto al quale ci si riferisce. I valori delle caratteristiche di sollecitazione sono normalmente riferiti al baricentro della sezione: nel caso di una sezione in C.A. tuttavia il baricentro assume una posizione diversa a seconda delle ipotesi che si adottano circa il comportamento del calcestruzzo. In generale, infatti, si può pensare di riferirsi al baricentro della sezione come se il calcestruzzo teso fornisse un contributo all'inerzia della sezione (e allora si parla di posizione del baricentro in sezione interamente reagente), oppure valutarne la posizione in accordo all'ipotesi di assenza di resistenza a trazione nel calcestruzzo e quindi trascurando il contributo all'inerzia della sezione delle fibre di cls che si trovano al di sotto dell'asse neutro (in questo caso si parlerà di posizione del baricentro in condizioni fessurate o di sezione parzializzata). Ancora, si considera spesso (per semplicità di calcolo e per congruenza rispetto alle ipotesi che spesso si utilizzano nella modellazione della struttura attraverso la sola linea d'asse degli elementi trave) la posizione del baricentro del solo calcestruzzo in sezione interamente reagente, quindi trascurando il contributo nella posizione del baricentro delle armature.

Nel corso del proseguimento della lezione, si considererà questa ultima circostanza: quindi, ad esempio nel caso di sezione rettangolare di altezza h, si ipotizzerà di valutare le caratteristiche di sollecitazione risultanti nella sezione rispetto alla posizione posta a distanza h/2 dal lembo maggiormente compresso (indipendentemente dalla presenza o meno di armature in zona compressa).

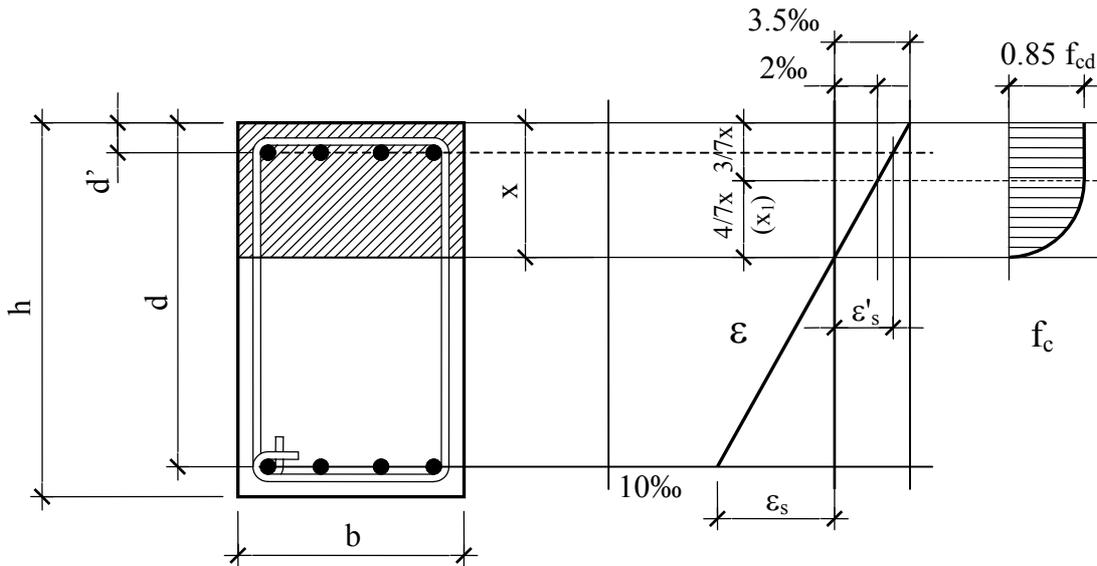
Così operando, indicando con x_G la distanza del baricentro dalla fibra di cls maggiormente compressa, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} N = C + C' - T \\ M = C \cdot (x_G - x'_C) + C' \cdot (x_G - d') - T \cdot (d - x_G) \end{cases}$$

Nelle relazioni precedenti si sono implicitamente considerati positivi gli sforzi normali di compressione e positivi i momenti flettenti che comprimono la parte superiore della sezione.

Nel caso in cui la distribuzione di tensioni corrisponda ad una configurazione di rottura per la sezione, la coppia di valori (N,M) viene indicata con (N_{rdu}, M_{rdu}) , dove i tre pedici indicano che si tratta di sollecitazioni di rottura (r), valutate in accordo alle tensioni di progetto (d), in condizioni di stato limite ultimo (u).

A titolo di esempio, e per illustrare le relazioni semplificate che vengono proposte in molte delle attuali Normative, si consideri il caso di una sezione rettangolare di base b, in cui si vogliano calcolare le caratteristiche di sollecitazione corrispondenti alla posizione dell'asse neutro riportata in figura (che corrisponde ad una rottura "lato calcestruzzo").



Tensioni nel calcestruzzo: esempio per rottura lato calcestruzzo

Si otterrebbe:

$$C = \int_0^x b \cdot f_c(\xi) d\xi = \int_0^{x_1} b \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon(\xi)}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] d\xi + \int_{x_1}^x b \cdot 0.85 \cdot f_{cd} d\xi$$

in cui x_1 è la profondità alla quale si attinge la deformazione del 2‰ nel calcestruzzo compresso

$$x_1 = \frac{2}{3.5} \cdot x = \frac{4}{7} \cdot x$$

e dove la funzione $\varepsilon(\xi)$ è evidentemente lineare rispetto a ξ

$$\varepsilon(\xi) = 0.0035 \cdot \frac{\xi}{x} = \varepsilon_0 \frac{7 \xi}{2 x}$$

Si ottiene quindi, con qualche semplice passaggio,

$$\begin{aligned} \frac{C}{b \cdot 0.85 \cdot f_{cd}} &= \left[\int_0^{(4/7)x} \left[2 \left(\frac{7 \xi}{2 x} \right) - \left(\frac{7 \xi}{2 x} \right)^2 \right] d\xi + \int_{(4/7)x}^x d\xi \right] = \\ &= \left[\frac{2}{7} x \int_0^2 [2y - y^2] dy + \int_{(4/7)x}^x d\xi \right] = \left[\frac{8}{21} x + \frac{3}{7} x \right] = \frac{17}{21} x \approx 0.8 \cdot x \end{aligned}$$

ossia

$$C = b \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot (0.8 \cdot x)$$

Con passaggi analoghi (che non vengono riportati per brevità)

$$x_C = \frac{1}{C} \int_0^x b(\xi) \cdot f_c(\xi) \cdot \xi d\xi = \dots = \frac{21}{34} \cdot x \approx 0.6 \cdot x$$

In sintesi si è ottenuto

$$C \approx b \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot (0.8 \cdot x) \quad x_C \approx 0.6 \cdot x$$

e quindi con buona approssimazione la distribuzione delle compressioni è equivalente (sia come risultante che come posizione della risultante) ad un rettangolo di altezza $0.8 \cdot x$ a partire dal lembo maggiormente compresso.

Le relazioni ricavate si dimostrano, da risultati sperimentali, sufficientemente accurate anche in situazioni diverse da quella riportata (ad esempio quando, per maggiori profondità dell'asse neutro, non sia abbia rottura lato calcestruzzo ma lato acciaio); quindi l'approssimazione dell'effettivo andamento della distribuzione delle tensioni nel calcestruzzo compresso (generalmente rappresentato da un diagramma parabola-rettangolo) con un diagramma rettangolare equivalente è utilizzabile nei casi pratici di interesse.

A tale proposito la normativa attuale riporta che (al p.to 4.2.1.3 del DM 9.1.96) “per la verifica locale delle sezioni, in alternativa al diagramma parabola rettangolo, la distribuzione delle compressioni può essere assunta uniforme con valori:

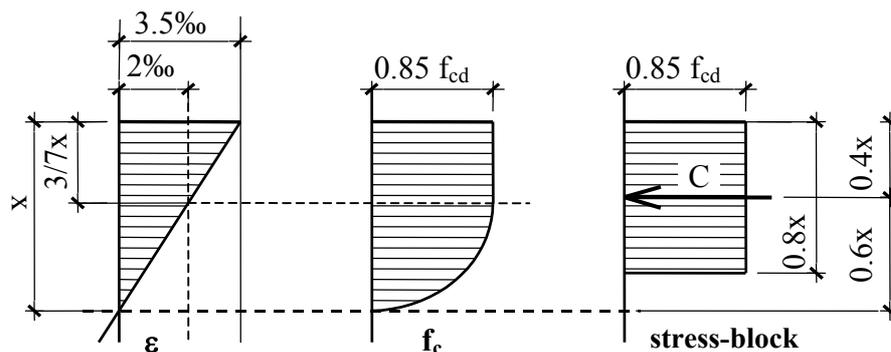
- $0.85 f_{cd}$ se la zona compressa presenta larghezza costante o crescente verso la fibra più compressa;
- $0.80 f_{cd}$ se la zona compressa presenta larghezza decrescente verso la medesima fibra;

sulle seguenti altezze, a partire dal lembo compresso:

se $x \leq h$: altezza $0.8 x$;

se $x > h$: altezza $\left(\frac{x - 0.8 h}{x - 0.75 h} \right) \cdot h$ ”

Tale modo di procedere (ossia l'utilizzo di diagrammi rettangolari equivalenti) è spesso indicato con il termine inglese di “stress-block”.



Approssimazione della legge parabola-rettangolo con lo “stress-block”

Verifica della sezione per sollecitazione composta di presso (o tenso) flessione

Nel caso in cui nella sezione agisca una sollecitazione esterna caratterizzata da un valore di sforzo normale N_{sdu} (dove i pedici indicano: s che si tratta di ente sollecitante, d che è un valore di progetto, u che la condizione è di stato limite ultimo) e di momento flettente M_{sdu} , la verifica della sezione consiste nel controllare che il punto di coordinate (N_{sdu}, M_{sdu}) cada all'interno o sulla frontiera del dominio resistente della sezione.

Il procedimento consiste quindi nell'ipotizzare le caratteristiche della sezione (in termini geometrici, b , h , d e d' , ed in termini di armature, A'_s e A_s), costruire per punti il contorno del dominio resistente e verificare che il punto (N_{sdu}, M_{sdu}) cada all'interno (o al massimo sul contorno) dello stesso. Tutte le osservazioni viste in precedenza sulle possibili semplificazioni nel calcolo del dominio (costruzione del dominio su un numero limitato di punti, utilizzo della relazione di “stress-block” per la valutazione delle compressioni nel calcestruzzo) possono essere utilizzate al fine di rendere la verifica maggiormente speditiva.

Verifica della sezione per sollecitazioni flessionali

Nel caso in cui si debba verificare una sezione che debba sopportare soltanto momento flettente, quindi con un valore nullo dello sforzo normale di progetto, la procedura di calcolo potrebbe limitarsi alla sola valutazione del punto del dominio di coordinate $(0, M_{rd})$, ovviamente con M_{rd} dello stesso segno del momento sollecitante M_{sdu} .

La procedura che verrà illustrata nel seguito sarà riferita, per semplicità, ad una sezione rettangolare di base b , altezza h , con armature al lembo compresso A'_s (a distanza d' dall'estradosso della sezione) e armature di area A_s in zona tesa (con altezza utile, ossia distanza delle armature dalla fibra maggiormente sollecitata di calcestruzzo, pari a d). Ovviamente valutazioni analoghe possono essere effettuate anche per sezioni di caratteristiche diverse.

Le quantità di armatura vengono spesso riferite all'area del calcestruzzo, in modo da considerare quantità adimensionali anziché dimensionali. Si introducono quindi i due rapporti di armatura ρ (rapporto geometrico di armatura) e ω (rapporto meccanico di armatura) definiti da:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

le stesse quantità con un apice (ρ' e ω') si intenderanno riferite all'armatura compressa. Il rapporto di armatura (rapporto tra la quantità di armatura disposta in zona compressa e la corrispondente in zona tesa) verrà indicato con α

$$\alpha = \frac{A'_s}{A_s}$$

Indicando con x la posizione dell'asse neutro (ovviamente interno alla sezione, data l'assenza di sforzo normale), si possono ricostruire le risultanti delle trazioni e delle compressioni utilizzando lo "stress-block" per il calcestruzzo (le distanze riportate si riferiscono rispetto all'estradosso della sezione, ossia alla distanza dalla fibra di calcestruzzo maggiormente compressa):

$$C = b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \quad \text{posizionata a } x_C = 0.4 \cdot x$$

$$C' = A'_s \cdot f'_s \quad \text{posizionata a } x_{C'} = d'$$

$$T = A_s \cdot f_s \quad \text{posizionata a } x_T = d$$

I valori di f'_s e f_s si ottengono in funzione delle deformazioni ε'_s e ε_s in corrispondenza della posizione delle armature, ossia, indicando con ε_c la deformazione del calcestruzzo alla fibra maggiormente sollecitata,

$$\varepsilon'_s = \frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_c \quad f'_s = \begin{cases} \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \end{cases}$$
$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \cdot \varepsilon_c \quad f_s = \begin{cases} \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

Il valore di M_{rd} si ottiene imponendo nulla la risultante dello sforzo normale sulla sezione e valutando il momento resistente rispetto ad un qualunque punto della sezione (visto che la condizione $N_{rd}=0$ permette di affermare che il valore del momento risultante risulterà lo stesso rispetto a qualunque punto). Si avrà quindi

$$N_{rd} = 0 \quad \Rightarrow \quad C + C' - T = 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A'_s \cdot f'_s = A_s \cdot f_s$$

$$M_{rd} = b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot (d - 0.4 \cdot x) + A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d')$$

Le equazioni appena scritte consentono in teoria di risolvere il problema, in quanto dalla prima si ricava la posizione di x e quindi dalla seconda il valore del momento resistente. Da un punto di vista

operativo è tuttavia necessario procedere per tentativi, in quanto i due valori della tensione f'_s e f_s dipendono, in maniera non lineare, dal valore di x : si opera quindi ipotizzando una posizione per x , valutando i due valori delle tensioni nelle armature, controllando la condizione $N_{rd} = 0$ fino a convergenza; una volta ricavato il valore corretto di x (e quindi la corretta condizione di rottura), si può procedere alla valutazione del momento resistente M_{rd} .

Il caso di armatura semplice

Alcune considerazioni aggiuntive possono essere effettuate se si considera la sezione con assenza di armatura compressa (quindi $A'_s = 0$, detta anche “di semplice armatura”). In questo caso le relazioni si semplificano nelle seguenti:

$$b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) = A_s \cdot f_s$$

$$M_{rd} = b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot (d - 0.4 \cdot x)$$

ed è possibile procedere per posizioni fissate dell'asse neutro. Infatti esiste una zona di variazione della posizione dell'asse neutro per cui l'acciaio teso è sicuramente ad una deformazione superiore rispetto a ε_{yd} , e quindi in cui la tensione nell'acciaio risulta pari a f_{yd} .

A tal fine, si individua una posizione particolarmente significativa per l'asse neutro in condizioni di rottura della sezione, indicata con x_{yd} , quella che corrisponde alla posizione per cui si raggiunge la deformazione ε_{yd} nell'armatura tesa, in condizioni ovviamente di rottura “lato calcestruzzo”. Si ha quindi

$$x_{yd} : 0.0035 = (d - x_{yd}) : \varepsilon_{yd} \quad \Rightarrow \quad x_{yd} = \frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}} d$$

e tale posizione è fissata una volta scelte le caratteristiche meccaniche dell'acciaio. Ad esempio, nel caso in cui le armature siano costituite da acciaio tipo FeB44k si avrebbe

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s \cdot E_s} = \frac{430}{1.15 \cdot 206000} = 0.00182$$

cioè pari circa all'1.82‰; di conseguenza

$$x_{yd} = \frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}} d = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.00182} d = 0.658 \cdot d$$

Quindi se l'asse neutro ha posizione compresa tra 0 e $0.658d$, l'acciaio teso è sicuramente snervato, per cui la tensione risulta pari a f_{yd} . Di conseguenza la prima delle due relazioni precedenti assume la forma

$$b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) = A_s \cdot f_{yd} \quad \Rightarrow \quad 0.68 \cdot \frac{x}{d} = \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{d} = \frac{\omega}{0.68}$$

E quindi

$$M_{rd} = b \cdot d^2 \cdot \left(0.8 \cdot \frac{\omega}{0.68}\right) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot \left(1 - 0.4 \cdot \frac{\omega}{0.68}\right)$$

$$\boxed{M_{rd} = b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0.59 \cdot \omega)}$$

Inoltre, utilizzando le relazioni precedentemente descritte, è possibile individuare, in funzione del valore del rapporto meccanico di armatura, la configurazione di rottura della sezione:

Posizione asse neutro a rottura	Caratteristiche della rottura della sezione	Definizione	Rapporto meccanico di armatura
$x < 0.259d$	Rottura lato acciaio	Campo delle deboli armature	$\omega < 0.176$
$0.259d < x/d < x_{yd}$	Rottura lato calcestruzzo	Campo delle medie armature	$0.176 < \omega < \omega_{yd}$
$x > x_{yd}$	Rottura lato calcestruzzo, acciaio in campo elastico	Campo delle forti armature	$\omega > \omega_{yd}$

Nota: nel caso di utilizzo di acciaio FeB44k, i due limiti x_{yd} e ω_{yd} valgono rispettivamente 0.658d e 0.448.

La scelta del valore di ω pari a 0.176 conduce ad una configurazione di rottura bilanciata, quindi, in un certo senso, rappresenta la condizione ottimale di utilizzo della sezione. Il valore di ω_{yd} , valore del rapporto meccanico di armatura al di sopra del quale si arriva alla rottura della sezione con acciaio ancora in campo elastico, risulta pari a

$$\omega_{yd} = 0.68 \cdot \frac{x_{yd}}{d}$$

Se l'armatura disposta nella sezione superasse tale valore, l'espressione per la determinazione della posizione dell'asse neutro a rottura in condizioni di sola flessione risulterebbe la seguente (ricordando che, in questo caso, $f_s = f_{yd} \cdot \varepsilon_s / \varepsilon_{yd}$, e che $\varepsilon_s = (d-x) \cdot 0.035/x$)

$$b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) = A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(\frac{d-x}{x} \right) \cdot \frac{0.0035}{\varepsilon_{yd}}$$

e quindi x si trova risolvendo tale equazione (di 2° grado).

E' bene infine osservare che usualmente si preferisce operare con sezioni che presentino, a rottura, una posizione dell'asse neutro limitata dalle seguenti quantità

$$0.100 \leq \frac{x}{d} \leq 0.450^{(*)}$$

e questo per due diversi ordini di motivi:

- la limitazione inferiore ($x/d > 0.10$) è dettata dalla constatazione che (almeno per momento positivo) la composizione e la qualità del calcestruzzo nella parte superiore della trave può risultare peggiore di quella nelle restanti parti delle travi, dato che il getto avviene per gravità e che quindi potrebbe aumentare la probabilità che la resistenza del getto in tale zona risulti inferiore a quella ipotizzata; inoltre tale limitazione garantisce comunque (al di là del modello di calcolo) che gli allungamenti dell'acciaio teso siano sufficientemente contenuti da garantire l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- la seconda ($x/d < 0.45$), riportata anche in molte delle attuali Normative (si veda il p.to 4.1.1.2 del DM 16.1.96) deriva dalla necessità di conferire comunque un'adeguata duttilità al calcestruzzo armato; dal momento che situazioni particolarmente profonde dell'asse neutro a rottura individuano situazioni in cui una notevole porzione di calcestruzzo compresso, e quindi la possibilità di spostarsi verso meccanismi di rottura della sezione maggiormente fragili, si richiede esplicitamente, a meno di non utilizzare modelli di calcolo più sofisticati o di disporre un'adeguata armatura di confinamento atta ad incrementare la duttilità della sezione, di non considerare situazioni a rottura in cui l'asse neutro assuma una posizione al di sopra del limite stabilito.

Di conseguenza, il "range" preferenziale di utilizzo del rapporto meccanico di armatura risulta $0.068 \leq \omega \leq 0.306$.

(*) Tale limitazione è da ritenersi valida per calcestruzzi di resistenza ordinaria ($f_{ck} < 35 \text{ N/mm}^2$); nel caso di calcestruzzi di resistenza superiore ($f_{ck} < 35 \text{ N/mm}^2$), tale limitazione va ridotta al valore 0.350.

Il braccio della coppia interna

È di interesse introdurre anche una nuova grandezza, denominata “braccio della coppia interna” ed indicata con la lettera z . Tale quantità rappresenta, rigorosamente solo nel caso di sezioni con armatura semplice, la distanza tra la risultante delle compressioni e quella di trazione, ossia quella quantità che, moltiplicata per il valore della risultante di compressione C (o di trazione T , dato che in flessione semplice tali quantità si equivalgono) fornisce il momento resistente:

$$M_{rdi} = C \cdot z (= T \cdot z)$$

Si ha:

$$z = d - 0.4 \cdot x = d \cdot \left(1 - 0.4 \cdot \frac{x}{d}\right)$$

Dal momento che la posizione di x/d è collegata linearmente al valore del rapporto meccanico di armatura, si ottiene

$$z = d \cdot \left(1 - 0.4 \cdot \frac{x}{d}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{0.4}{0.68} \cdot \omega\right) = d \cdot (1 - 0.588 \cdot \omega)$$

Nel “range” preferenziale di utilizzo del rapporto meccanico di armatura risulta quindi

$$0.820 \leq \frac{z}{d} \leq 0.960,$$

e molto spesso si utilizza l'approssimazione (indipendente dal valore di ω)

$$\frac{z}{d} \approx 0.9$$

come risulterà evidente nei capitoli seguenti.

La condizione di rottura bilanciata

Si è già visto che in condizioni di rottura bilanciata la profondità dell'asse neutro assume il valore $x = 0.259 \cdot d$

Di conseguenza, usando lo “stress-block” per il calcolo della risultante di compressione nel calcestruzzo (le distanze riportate si riferiscono rispetto all'estradosso della sezione, ossia alla distanza dalla fibra di calcestruzzo maggiormente compressa)

$$C = b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \quad \text{posizionata a } x_C = 0.4 \cdot x$$

$$T = A_s \cdot f_{yd} \quad \text{posizionata a } x_T = d$$

si ha

$$N_{rdi} = C - T = b \cdot (0.8 \cdot 0.259 \cdot d) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) - A_s \cdot f_{yd} \approx 0.176 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} - A_s \cdot f_{yd}$$

o anche

$$N_{rdi} = b \cdot d \cdot f_{cd} \cdot (0.176 - \omega)$$

$$M_{rdi} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x\right) + A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) \approx b \cdot d \cdot f_{cd} \cdot \left[0.176 \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.1 \cdot d\right) + \omega \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)\right]$$

Nel caso in cui fosse presente anche l'armatura compressa, alle grandezze precedenti si aggiunge una risultante di compressione

$$C' = A'_s \cdot f'_s$$

dove f'_s , tensione al livello delle armature compresse, dipende dal valore di ϵ'_s

$$\varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \cdot 0.0035 \quad f'_s = \begin{cases} \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} & \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

e quindi, utilizzando formule analoghe a quelle viste in precedenza,

$$N_{rd} = C + C' - T$$

$$M_{rd} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + A'_s \cdot f'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

La condizione di rottura bilanciata può essere utilizzata quando si cerchi di progettare una sezione che debba sopportare soltanto momento flettente, quindi con un valore nullo dello sforzo normale di progetto.

In questo caso, indicando con M_{sdu} il valore dello sforzo normale di progetto, occorre individuare una sezione nella quale si abbia $M_{rd} \geq M_{sdu}$, imponendo ad esempio che la condizione di rottura equivalga a quella di rottura bilanciata. Tale condizione consentirebbe infatti il massimo sfruttamento dei due materiali, quindi minimizzando la quantità di calcestruzzo e di armatura impiegata. In questo caso possibile individuare una “formula di progetto” per la sezione: si ipotizzi, come primo tentativo, che l’armatura compressa, in condizione di rottura bilanciata, si trovi ad livello di deformazione tale da risultare snervata, cioè che

$$\varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \cdot \varepsilon_c = \frac{0.259 \cdot d - d'}{0.259 \cdot d} \cdot 0.0035 = \left(1 - 3.861 \cdot \frac{d'}{d} \right) \cdot 0.0035 \geq \varepsilon_{yd}$$

In questo caso l’equazione di equilibrio alla traslazione (assenza di sforzo normale) si traduce in

$$N_{rd} = 0 \Rightarrow C + C' - T = 0 \Rightarrow b \cdot (0.8 \cdot 0.259 \cdot d) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot f_{yd} = 0$$

o anche (introducendo il rapporto di armatura α ed il rapporto meccanico di armatura ω)

$$(0.8 \cdot 0.259) \cdot (0.85) = (1 - \alpha) \cdot \omega$$

e quindi

$$\omega = \frac{0.176}{1 - \alpha}$$

L’espressione precedente consente, una volta fissato il rapporto di armatura (ad esempio, $A'_s = 0.5 \cdot A_s$, cioè $\alpha = 0.5$), di stabilire la percentuale meccanica di armatura necessaria ad avere una rottura bilanciata della sezione in condizioni di solo momento flettente.

Imponendo la condizione di verifica della sezione (quindi che $M_{rd} \geq M_{sdu}$) e la condizione di equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro dell’armatura tesa, si ha

$$C \cdot (d - 0.4 \cdot x) + A'_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d') \geq M_{sdu}$$

e con qualche passaggio

$$b \cdot (0.8 \cdot 0.259 \cdot d) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot (d - 0.4 \cdot 0.259 \cdot d) + A'_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d') \geq M_{sdu}$$

$$0.158 + \alpha \cdot \omega \cdot \left(1 - \frac{d'}{d} \right) \geq \frac{M_{sdu}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

sostituendo il valore di ω precedentemente trovato

$$0.158 + 0.176 \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \cdot \left(1 - \frac{d'}{d} \right) \geq \frac{M_{sdu}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$0.158 + 0.176 \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \cdot \left(1 - \frac{d'}{d} \right) \geq \frac{M_{sdu}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

$$b \cdot f_{cd} \cdot \left[0.158 \cdot d^2 + 0.176 \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \cdot d \cdot (d-d') \right] \geq M_{sdu}$$

$$b \cdot f_{cd} \cdot d \cdot \left[\left(0.158 + \frac{\alpha \cdot 0.176}{(1-\alpha)} \right) \cdot d - \frac{\alpha \cdot 0.176}{(1-\alpha)} \cdot d' \right] \geq M_{sdu}$$

La relazione ricavata rappresenta una disequazione di secondo grado nell'incognita d : fissando quindi il valore della base della sezione, del rapporto di armatura α e la posizione dell'armatura compressa d' , è possibile ricavare il valore minimo di d che garantisce la verifica allo SLU in condizioni di rottura bilanciata; successivamente poi si definisce l'ammontare dell'armatura tesa e compressa attraverso la relazione in ω .

La relazione precedente perde di significato quando $\alpha \rightarrow 1$; è del resto abbastanza incongruente cercare di progettare in modo da ottenere la rottura bilanciata in una sezione con una forte armatura in zona compressa. Basti pensare che nel caso $A'_s = A_s$, cioè $\alpha = 1$, risulterebbe impossibile imporre contemporaneamente le due condizioni $N_{rd} = 0$ (assenza di sforzo normale) e $x = 0.259 \cdot d$ (rottura bilanciata) in quanto si avrebbe una risultante delle compressioni nell'armatura compressa (C') uguale a quella di trazione nelle armature tese, per cui il termine $C + C' - T$ assumerebbe comunque valori > 0 (a meno di non avere $x = 0$), evidenziando così il fatto che la condizione di rottura con valori di $x > 0$ non può essere verificata in assenza di sforzo normale.

In generale, l'approccio utilizzato risulta significativo soltanto nella zona in cui l'armatura disposta in zona compressa risulti sufficientemente minore della corrispondente in zona tesa.

Il caso di armatura semplice

Nel caso di sezione con armatura soltanto in zona tesa, l'espressione precedente si semplifica in

$$0.158 \cdot b \cdot f_{cd} \cdot d^2 \geq M_{sdu}$$

dal momento che $\alpha = 0$. È quindi possibile procedere al progetto di una sezione semplicemente inflessa in modo da ottenere una rottura bilanciata: basterà infatti imporre che il momento resistente uguagli (al minimo) il momento sollecitante per ottenere

$$d = \sqrt{\frac{1}{0.158 \cdot f_{cd}}} \sqrt{\frac{M_{sdu}}{b}}$$

o anche, con semplici passaggi,

$$d \approx \left(\frac{3.5}{\sqrt{R_{ck}}} \right) \cdot \sqrt{\frac{M_{sdu}}{b}} = r' \cdot \sqrt{\frac{M_{sdu}}{b}}$$

dove si è posto

$$r' = \frac{3.5}{\sqrt{R_{ck}}}$$

Dalla relazione che lega il valore del rapporto meccanico di armatura con la profondità dell'asse neutro a rottura si ottiene inoltre

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = 0.176 \Rightarrow A_s = \frac{0.176 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

sfruttando la relazione ricavata in precedenza, si può ricavare, con semplici sostituzioni,

$$A_s = \left(\sqrt{\frac{0.1 \cdot R_{ck}}{f_{yd}^2}} \right) \cdot \sqrt{M_{sdu} \cdot b} = t' \cdot \sqrt{M_{sdu} \cdot b}$$

avendo posto

$$t' = \sqrt{\frac{0.1 \cdot R_{ck}}{f_{yd}^2}}$$

Le due formule riportate consentono, una volta fissate le caratteristiche dei materiali, di scegliere l'altezza della sezione e l'area dell'armatura in modo da resistere alla sollecitazione flessionale in condizioni di rottura bilanciata^(*).

Una formula approssimata di progetto nel caso di pressoflessione nei pilastri

Negli elementi verticali soggetti a presso flessione siamo in presenza generalmente di elementi con valori abbastanza elevati dello sforzo normale e di solito con armature simmetriche (ossia $A_s = A'_s$, $\alpha = 1$).

In questo caso, noti i valori dello sforzo normale e del momento flettente di progetto (N_{sdu} , M_{sdu}), si può pensare di impostare il calcolo in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, per giungere ad un predimensionamento della dimensione della sezione.

Ipotizzando di sfruttare sia l'armatura compressa che quella tesa alla massima tensione (quindi $f'_s = f_s = f_{yd}$), si ottiene

$$C' = A'_s \cdot f'_s = A'_s \cdot f_{yd}$$

$$T = A_s \cdot f_s = A_s \cdot f_{yd}$$

e quindi $T = C'$; di conseguenza l'equilibrio alla traslazione comporta che (imponendo l'uguaglianza tra sforzo normale resistente e sforzo normale sollecitante)

$$N_{sdu} = C + C' - T = C \Rightarrow N_{sdu} = b \cdot (0.8 \cdot x) \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) = 0.68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x$$

cioè

$$x = \frac{N_{sdu}}{0.68 \cdot f_{cd} \cdot b}$$

equazione che permette di valutare la posizione dell'asse neutro.

L'equilibrio alla rotazione rispetto alla posizione di metà altezza della sezione (che corrisponde anche al baricentro della sezione interamente reagente, stante la supposta simmetria delle armature) assume la forma

$$M_{sdu} = 0.68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + A'_s \cdot f_{yd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_{sdu} = 0.68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

Utilizzando le approssimazioni

$$d - d' \approx d, \quad h \approx d$$

tanto più valide quanto minore è il copriferro dell'armatura rispetto all'altezza della sezione, e utilizzando la definizione di rapporto geometrico di armatura

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$$

si può riscrivere l'equazione precedente nella forma

^(*) I due coefficienti r' e t' , che dipendono solo dalle caratteristiche dei materiali impiegati, sono gli equivalenti agli stati limite dei coefficienti r e t che si utilizzano nel progetto secondo il metodo delle tensioni ammissibili.

$$0.68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot \left(e - \frac{d}{2} - 0.4 \cdot x \right) = \rho \cdot f_{yd} \cdot b \cdot d^2$$

in cui si è posto

$$e = \frac{M_{sdu}}{N_{sdu}}$$

e si è sfruttata la relazione

$$N_{sdu} = 0.68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x$$

Si è così giunti all'equazione di secondo grado in d

$$\frac{\rho \cdot f_{yd}}{0.68 \cdot f_{cd}} \cdot d^2 + x \cdot \frac{d}{2} - x \cdot (e - 0.4 \cdot x) = 0$$

dove x assume il valore ricavato in precedenza.

L'equazione appena introdotta consente, una volta fissato un valore plausibile del rapporto geometrico di armatura⁽⁺⁾, di ottenere, a causa della approssimazioni introdotte, soltanto un predimensionamento dell'altezza utile della sezione: occorrerà quindi, successivamente al progetto della sezione, procedere alla verifica secondo quanto specificato in precedenza.

Infine, la procedura si presta ad essere utilizzata soltanto quando il valore dell'eccentricità e non risulti troppo elevato: in caso di eccentricità notevoli (e quindi notevole preponderanza della sollecitazione flessionale rispetto a quella assiale), converrà ottenere il predimensionamento della sezione ipotizzando una rottura per flessione semplice e procedere successivamente alla verifica per pressoflessione.

Prescrizioni di normativa: armature minime

La Normativa vigente riporta alcune prescrizioni (contenute nella parte relativa alle regole pratiche di progettazione) riguardo le armature minime da disporre negli elementi in c.a. di uso corrente, in particolare travi e pilastri. Nel seguito si riportano le principali di tali limitazioni, rinviando al testo della Normativa ed alla relativa circolare esplicativa per un elenco puntuale delle varie prescrizioni.

Travi

Nelle strutture inflesse in elevazione la percentuale di armatura longitudinale, nella zona tesa, riferita all'area totale della sezione di conglomerato, non deve scendere sotto lo 0.15 per barre ad aderenza migliorata e sotto lo 0.25 per barre lisce. Tale armatura deve essere convenientemente diffusa.

Alle estremità delle travi deve essere disposta una armatura inferiore, convenientemente ancorata, in grado di assorbire, allo stato limite ultimo, uno sforzo di trazione uguale al taglio.

Sempre nelle travi devono essere disposte staffe (si veda uno dei successivi capitoli dedicato al taglio) aventi sezione complessiva non inferiore a

$$A_{st} = 0.10 \cdot \left(1 + 0.15 \cdot \frac{d}{b} \right) \cdot b \quad (\text{in cm}^2 / \text{m})$$

con d e b espressi in cm, e dove b rappresenta lo spessore minimo dell'anima della trave ed in cui si può porre d, altezza utile della sezione, pari a $d = 0.9 \cdot h$ con h altezza della sezione.

In ogni caso deve essere previsto un minimo di tre staffe al metro e comunque passo non superiore a 0,8 volte l'altezza utile della sezione. Tali staffe devono essere collegate da apposite armature longitudinali.

⁽⁺⁾ Il valore di ρ risente comunque di alcune limitazioni imposte dalla Normativa, come specificato nel paragrafo successivo. In fase di predimensionamento si può assumere un'area pari all'1÷2% della sezione effettiva (e quindi $\rho \approx 0.005 \div 0.010$) e procedere al calcolo del pilastro.

In prossimità di carichi concentrati o delle zone d'appoggio, per una lunghezza pari all'altezza utile della sezione da ciascuna parte del carico concentrato, il passo delle staffe non dovrà superare il valore $12 \cdot \varnothing_1$, essendo \varnothing_1 il diametro minimo dell'armatura longitudinale.

Pilastrri

Nei pilastrri soggetti a compressione centrata od eccentrica deve essere disposta un'armatura longitudinale di sezione non minore di

$$A_1 \geq 0.15 \cdot \frac{N_{Sd}}{f_{yd}}$$

dove N_{Sd} è la forza normale di calcolo in esercizio per combinazione di carico rara e f_{yd} è la resistenza di calcolo^(†). L'area dell'armatura longitudinale deve risultare comunque compresa fra lo 0.3% e il 6% della sezione effettiva.

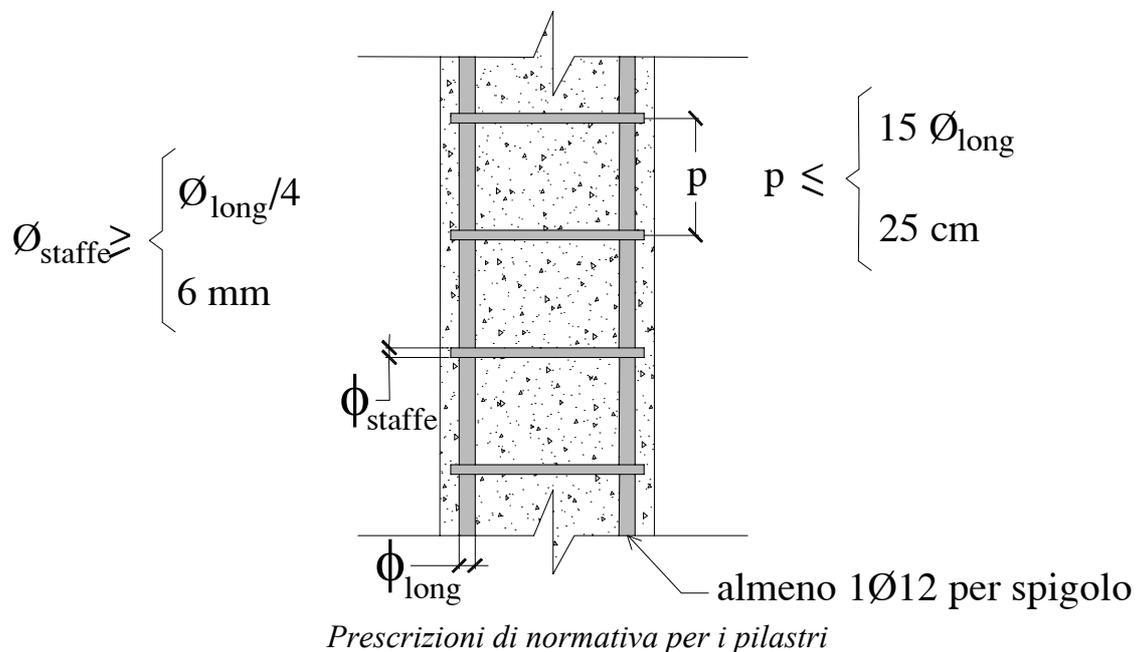
In ogni caso il numero minimo di barre longitudinali è quattro per i pilastrri a sezione rettangolare o quadrata e sei per quelli a sezione circolare, ed il diametro delle barre longitudinali non deve essere minore di 12 mm.

Deve essere sempre prevista una staffatura posta ad interasse non maggiore di 15 volte il diametro minimo delle barre impiegate per l'armatura longitudinale, con un massimo di 25 cm.

Tali staffe devono presentare un diametro non minore di 6 mm e di 1/4 del diametro massimo delle barre longitudinali; inoltre le staffe devono essere chiuse e conformate in modo da contrastare efficacemente, lavorando a trazione, gli spostamenti delle barre longitudinali verso l'esterno.

Le funzioni principali svolte dalle staffe, nel caso di elementi prevalentemente compressi quali i pilastrri, sono essenzialmente le seguenti:

- impedire che le barre longitudinali si instabilizzino;
- “confinare” il calcestruzzo, quindi migliorandone la resistenza e la duttilità in presenza di forti compressioni, limitando le possibilità di rotture di tipo “fragile” proprie di tali elementi strutturali.



^(†) La circolare riporta una prescrizione un po' diversa, correggendo tale affermazione con l'indicazione che “ N_{Sd} è la forza normale di calcolo (allo stato limite ultimo)”.

Stati limite nel cemento armato

Stato limite ultimo per tensioni normali: applicazioni

Nel seguito si riportano alcuni esempi di applicazione delle procedure descritte nel paragrafo precedente. Si considereranno le seguenti caratteristiche per i materiali impiegati:

calcestruzzo: $R_{ck} 30$ ($R_{ck}=30 \text{ N/mm}^2$): tensione di progetto:

$$f_{ck} = 0.83 \cdot R_{ck} = 0.83 \cdot 30 = 24.90 \text{ N/mm}^2 = 24.90 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{24.90}{1.6} = 15.56 \text{ N/mm}^2 = 15.56 \text{ MPa}$$

acciaio per armature: FeB44k ($f_{yk}=430 \text{ N/mm}^2$): tensione di progetto:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{430}{1.15} = 374 \text{ N/mm}^2 = 374 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{374}{206000} = 0.00182$$

Esempio #1

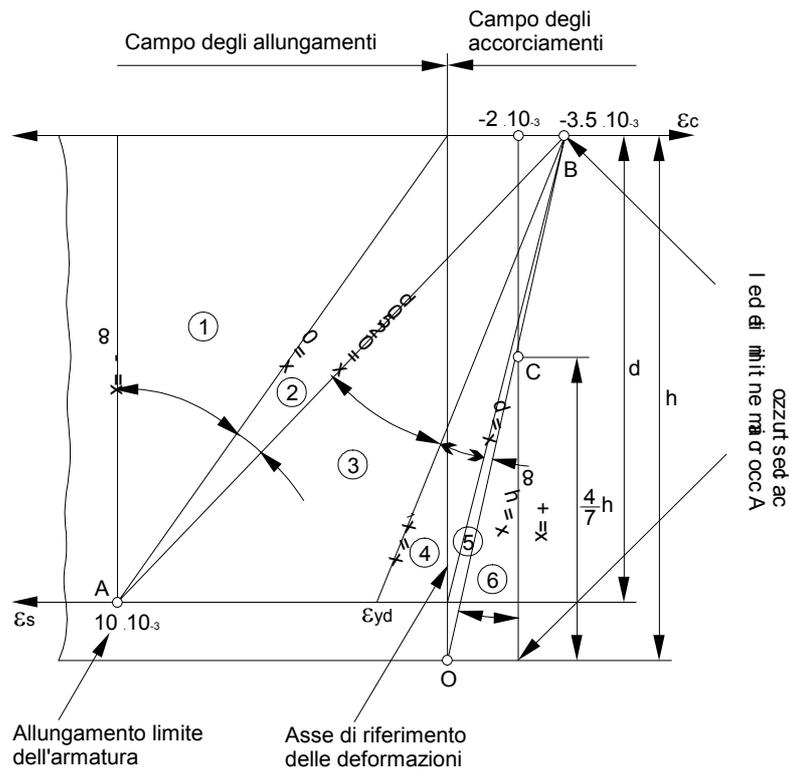
Calcolo del dominio resistente di una sezione rettangolare

Consideriamo una sezione rettangolare di base 30 cm ($b=300 \text{ mm}$), altezza 50 cm ($h=500 \text{ mm}$), distanza del baricentro delle armature dal bordo della sezione 4 cm (quindi $d'=40 \text{ mm}$, $d=h-d'=460 \text{ mm}$), armatura compressa costituita da 3Ø16 ($A'_s = 3 \cdot 201 = 603 \text{ mm}^2$), armatura tesa 5Ø20 ($A_s = 5 \cdot 314 = 1570 \text{ mm}^2$). La sezione in esame è quindi caratterizzata da un rapporto di armatura pari a

$$\alpha = \frac{A'_s}{A_s} = \frac{603}{1570} = 0.384$$

Si determineranno alcuni punti caratteristici del dominio, in particolare quelli corrispondenti alle seguenti posizioni dell'asse neutro (e delle deformazioni in corrispondenza della fibra maggiormente compressa di cls e dell'armatura tesa, negative se allungamenti):

p.to #	asse neutro	ε_c	ε_s	Tipo rottura
1	$x=-\infty$	-10‰	-10‰	Sezione uniformemente tesa: rottura lato acciaio
2	$x=0$	0	-10‰	Limite sezione interamente tesa: rottura lato acciaio
3	$x=0.259 \cdot d$	3.5‰	-10‰	Condizione di rottura bilanciata
4	$x = \frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}} d$	3.5‰	$-\varepsilon_{yd}$	Acciaio teso al limite elastico: rottura lato calcestruzzo
5	$x=d$	3.5‰	0	Acciaio teso scarico: rottura lato calcestruzzo
6	$x=h$	3.5‰	$0.0035 \cdot \frac{d'}{h}$	Limite sezione interamente compressa: rottura lato calcestruzzo
7	$x=+\infty$	2‰	2‰	Sezione uniformemente compressa: rottura lato calcestruzzo



punto #1, $x = -\infty$, $\varepsilon_c = -10\text{‰}$, $\varepsilon_s = -10\text{‰}$

Ovviamente anche $\varepsilon'_s = -10\text{‰}$, da cui (indicando con il segno negativo gli sforzi normali di trazione):

$$f'_s = f_{yd} = -374 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = -603 \cdot 374 \text{ N} = -225522 \text{ N} = -225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = -374 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$f_c = 0 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow C = 0 \text{ kN}$$

e quindi

$$N_{rd,u} = C + C' + T = 0 - 225.5 - 587.2 = -812.7 \text{ kN}$$

dove il segno negativo evidenzia il fatto che di sforzo normale di trazione si tratta. Analogamente:

$$M_{rd,u} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) =$$

$$= 0 - 225.5 \cdot (250 - 40) + 587.2 \cdot (460 - 250) = 75957 \text{ kNmm} = 75.96 \text{ kNm}$$

punto #2, $x = 0$, $\varepsilon_c = 0$, $\varepsilon_s = -10\text{‰}$

Occorre ricavare il valore di ε'_s :

$$\varepsilon'_s : d' = 0.010 : d \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.010 \cdot \frac{d'}{d} = 0.010 \cdot \frac{40}{460} = 0.000869 < \varepsilon_{yd}$$

L'acciaio superiore è quindi ancora in fase elastica. Di conseguenza si ha

$$f'_s = \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = E_s \cdot \varepsilon'_s = 206000 \cdot 0.010 \cdot \frac{40}{460} = 179 \text{ MPa}$$

e quindi

$$f'_s = -179 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = -603 \cdot 179 \text{ N} = -107937 \text{ N} = -107.9 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = -374 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$f_c = 0 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow C = 0 \text{ kN}$$

$$N_{rd} = C + C' + T = 0 - 107.9 - 587.2 = -695.1 \text{ kN}$$

$$M_{rd} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 0 - 107.9 \cdot (250 - 40) + 587.2 \cdot (460 - 250) = 100653 \text{ kNmm} = 100.65 \text{ kNm}$$

punto #3, $x=0.259 \cdot d$, $\varepsilon_c=3.5\text{‰}$, $\varepsilon_s=-10\text{‰}$

Anche in questo caso occorre ricavare il valore di ε'_s :

$$x = 0.259 \cdot d = 0.259 \cdot 460 \text{ mm} = 119 \text{ mm}$$

$$\varepsilon'_s : (x - d') = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{119 - 40}{119} = 0.0023 > \varepsilon_{yd}$$

L'acciaio superiore è quindi snervato, di conseguenza

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = -374 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot (0.8 \cdot 119) = 377735 \text{ N} = 377.7 \text{ kN}$$

$$N_{rd} = C + C' + T = 377.7 + 225.5 - 587.2 = 16.0 \text{ kN}$$

$$M_{rd} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 377.7 \cdot (250 - 0.4 \cdot 119) + 225.5 \cdot (250 - 40) + 587.2 \cdot (460 - 250) = 247114 \text{ kNmm} = 247.12 \text{ kNm}$$

È da notare che, nel caso specifico della sezione analizzata, la condizione di rottura bilanciata individua anche il punto in cui si ha $N_{rd}=0$, ossia la condizione di assenza di sforzo normale. Il fatto è abbastanza casuale e, in generale, la condizione di rottura per flessione pura non comporta la concomitanza con il bilanciamento delle massime deformazioni a rottura.

punto #4, $x=0.0035/(0.0035+\varepsilon_{yd})$, $\varepsilon_c=3.5\text{‰}$, $\varepsilon_s=\varepsilon_{yd}=-1.82\text{‰}$

$$x = \frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}} \cdot d = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.00182} \cdot 460 = 0.658 \cdot 460 = 303 \text{ mm}$$

Dovremmo anche in questo caso calcolare la deformazione nell'acciaio compresso; è tuttavia evidente che, dal momento che rispetto al punto precedente (dove già l'acciaio compresso risultava ad una deformazione maggiore rispetto a ε_{yd}) l'asse neutro si trova in una posizione inferiore, l'acciaio compresso dovrà risultare snervato anche in questo caso. Infatti si ha:

$$\varepsilon'_s : (x - d') = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{119 - 40}{119} = 0.0023 > \varepsilon_{yd}$$

e quindi

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = -374 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot (0.8 \cdot 303) = 961795 \text{ N} = 961.8 \text{ kN}$$

$$N_{rd} = C + C' + T = 961.8 + 225.5 - 587.2 = 600.1 \text{ kN}$$

$$M_{rd} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 961.8 \cdot (250 - 0.4 \cdot 303) + 225.5 \cdot (250 - 40) + 587.2 \cdot (460 - 250) = 294547 \text{ kNmm} = 294.55 \text{ kNm}$$

punto #5, $x=d$, $\varepsilon_c=3.5\%$, $\varepsilon_s=0$

Anche in questo caso l'acciaio compresso è snervato

$$\varepsilon'_s : (x - d') = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{460 - 40}{460} = 0.0032 > \varepsilon_{yd}$$

mentre l'acciaio teso è scarico, quindi

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = 0 \Rightarrow T = 0 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot (0.8 \cdot 460) = 1460151 \text{ N} = 1460.2 \text{ kN}$$

$$N_{rd,u} = C + C' + T = 1460.2 + 225.5 + 0 = 1685.7 \text{ kN}$$

$$M_{rd,u} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 1460.2 \cdot (250 - 0.4 \cdot 460) + 225.5 \cdot (250 - 40) = 143728 \text{ kNmm} = 143.73 \text{ kNm}$$

punto #6, $x=h$, $\varepsilon_c=3.5\%$, $\varepsilon_s=0.035 \cdot d'/h$

Analogamente al caso precedente l'acciaio superiore è evidentemente snervato

$$\varepsilon'_s : (x - d') = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{500 - 40}{500} = 0.0032 > \varepsilon_{yd}$$

mentre l'acciaio inferiore è anch'esso compresso al valore

$$\varepsilon_s : d' = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{40}{500} = 0.00028 < \varepsilon_{yd}$$

quindi in campo elastico; la tensione nell'armatura inferiore vale

$$f_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} \cdot f_{yd} = E_s \cdot \varepsilon_s = 206000 \cdot 0.00028 = 58 \text{ MPa}$$

Si ha quindi:

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = 58 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = 1570 \cdot 58 \text{ N} = 91060 \text{ N} = 91.1 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot (0.8 \cdot 500) = 1587120 \text{ N} = 1587.1 \text{ kN}$$

$$N_{rd,u} = C + C' + T = 1587.1 + 225.5 + 91.1 = 1903.7 \text{ kN}$$

$$M_{rd,u} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 1587.1 \cdot (250 - 0.4 \cdot 500) + 225.5 \cdot (250 - 40) - 91.1 \cdot (250 - 40) = 107579 \text{ kNmm} = 107.58 \text{ kNm}$$

punto #7, $x=+\infty$, $\varepsilon_c=2\%$, $\varepsilon_s=2\%$

La situazione di sezione uniformemente compressa è ovviamente caratterizzata dallo snervamento di entrambe le armature (che risultano compresse) e quindi si ha

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = 1570 \cdot 374 \text{ N} = 587180 \text{ N} = 587.2 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot 500 = 1983900 \text{ N} = 1983.9 \text{ kN}$$

E' da notare che in questo caso non si usa lo stress-block, in quanto il calcestruzzo è sottoposto ad una tensione uniforme, e quindi è l'intera area ad intervenire nella formula della risultante. Del resto, la Normativa richiede che, per posizioni dell'asse neutro esterne alla sezione e sezione interamente compressa, l'altezza del diagramma rettangolare dello stress-block sia pari a

$$\left(\frac{x - 0.8 h}{x - 0.75 h} \right) \cdot h$$

e quindi, per x che tende a ∞ , converge al valore h . Inoltre la risultante del calcestruzzo passa per il baricentro della sezione, quindi non dà contributo al momento flettente ultimo.

$$N_{rd\ u} = C + C' + T = 1983.9 + 225.5 + 587.2 = 2796.6 \text{ kN}$$

$$M_{rd\ u} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) =$$

$$= 225.5 \cdot (250 - 40) - 587.2 \cdot (250 - 40) = -75957 \text{ kNmm} = -75.96 \text{ kNm}$$

Il valore è chiaramente uguale, a parte il segno, a quello ricavato per il punto #1.

Ricapitolando quindi si ha:

p.to #	asse neutro	Tipo rottura	$N_{rd\ u}$ [kN]	$M_{rd\ u}$ [kNm]
1	$x = -\infty$	Sezione uniformemente tesa: rottura lato acciaio	-812.7	75.96
2	$x = 0$	Limite sezione interamente tesa: rottura lato acciaio	-695.1	100.65
3	$x = 0.259 \cdot d$	Condizione di rottura bilanciata	16.0	247.12
4	$x = \frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}} d$	Acciaio teso al limite elastico: rottura lato calcestruzzo	600.1	294.55
5	$x = d$	Acciaio teso scarico: rottura lato calcestruzzo	1685.7	143.73
6	$x = h$	Limite sezione interamente compressa: rottura lato calcestruzzo	1903.7	107.58
7	$x = +\infty$	Sezione uniformemente compressa: rottura lato calcestruzzo	2796.6	-75.96

Occorre ricordare che la normativa impone una limitazione sul massimo sforzo normale (di compressione) che può essere applicato alla sezione. Il valore si trova riducendo la tensione massima del calcestruzzo introducendo un valore di γ_c maggiorato del 25% (e quindi pari a $1.6 \cdot 1.25 = 2.0$) ed ipotizzando una condizione di deformazione uniforme (pari al 2‰) nell'intera sezione. Si ha quindi:

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 603 \cdot 374 \text{ N} = 225522 \text{ N} = 225.5 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = 1570 \cdot 374 \text{ N} = 587180 \text{ N} = 587.2 \text{ kN}$$

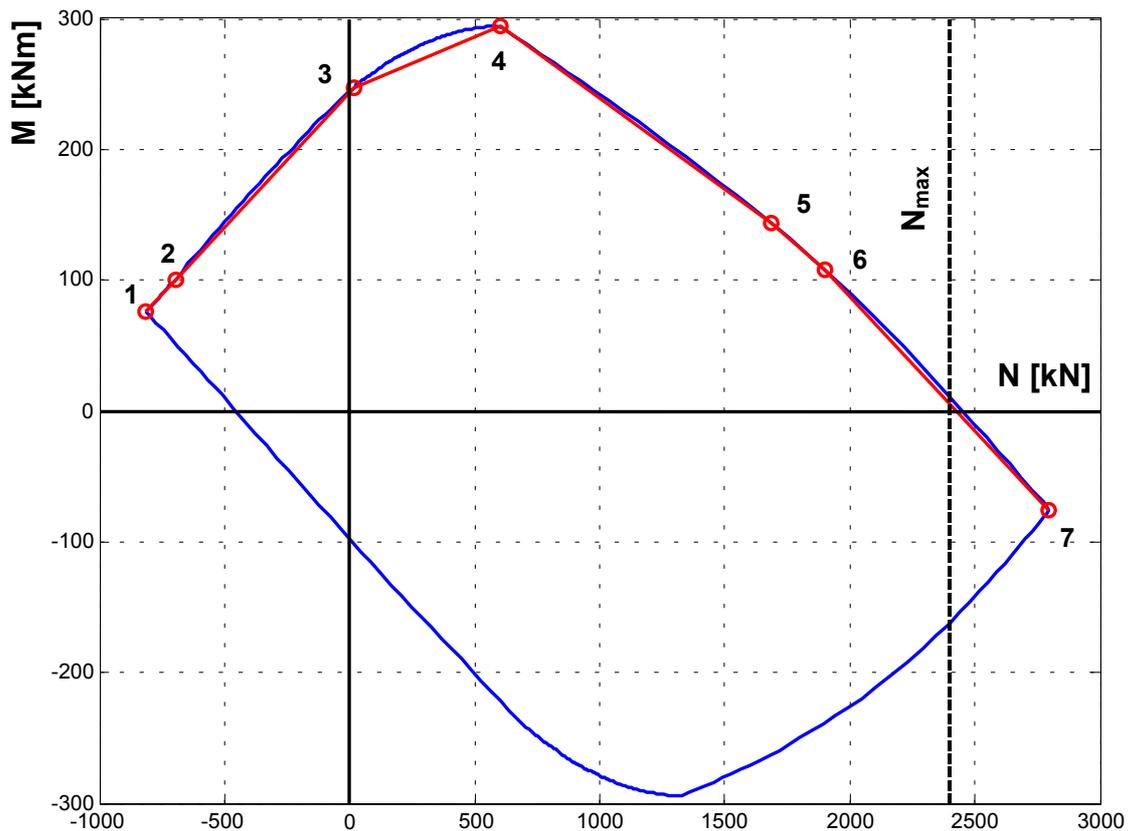
$$\bar{f}_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.25 \cdot \gamma_c} = \frac{24.90}{2.00} = 12.45 \text{ N/mm}^2 = 12.45 \text{ MPa}$$

$$C = 0.85 \cdot \bar{f}_{cd} \cdot b \cdot h = 0.85 \cdot 12.45 \cdot 300 \cdot 500 = 1587375 \text{ N} = 1587.4 \text{ kN}$$

$$N_{max} = C + C' + T = 1587.4 + 225.5 + 587.2 = 2400.1 \text{ kN}$$

Nella figura seguente è riportato il dominio che si è ottenuto, unitamente a quello che si sarebbe ottenuto utilizzando molti più punti, e considerando anche valori negativi per la sollecitazione flessionale (ossia ritenendo tesa la parte superiore della sezione e compressa quella inferiore).

Si può notare come, anche con un numero limitato di punti, si ottenga comunque una buona approssimazione dell'effettivo andamento del dominio resistente.



Esempio #2

Progetto e verifica di una sezione rettangolare semplicemente inflessa

Si supponga di dover progettare una sezione rettangolare in grado di resistere ad un momento sollecitante $M_{sdu} = 20 \text{ tm} = 200 \text{ kNm}$ in assenza di sforzo normale ($N_{sdu} = 0$).

Si assuma $b = 25 \text{ cm}$ (250 mm), $d' = 4 \text{ cm}$ (40 mm), e si scelga $\alpha = 0.5$ (armatura compressa pari alla metà di quella tesa).

La condizione di rottura bilanciata e di assenza di sforzo normale impone che

$$\omega = \frac{0.176}{1 - \alpha} = \frac{0.176}{1 - 0.5} = 0.352$$

e quindi si ottiene la disequazione di secondo grado

$$f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot \left[\left(0.158 + \frac{\alpha \cdot 0.176}{(1 - \alpha)} \right) \cdot d - \frac{\alpha \cdot 0.176}{(1 - \alpha)} \cdot d' \right] \geq M_{sdu}$$

$$15.56 \cdot 250 \cdot d \cdot \left[(0.158 + 0.176) \cdot d - 0.176 \cdot 40 \right] \geq 2 \cdot 10^8$$

in cui si sono espresse tutte le grandezze in N e mm. Risolvendo l'equazione di uguaglianza tra momento resistente e momento sollecitante

$$1299 \cdot d^2 - 27386 \cdot d - 2 \cdot 10^8 = 0$$

si ottiene (come radice positiva)

$$d = 403 \text{ mm}$$

e quindi la disequazione risulta soddisfatta se

$$d \geq 403 \text{ mm}$$

Si assume $d=410$ mm ($h=410+40=450$ mm) e si ottiene

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \Rightarrow A_s = \frac{\omega \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0.352 \cdot 250 \cdot 410 \cdot 15.56}{374} = 1501 \text{ mm}^2$$

per cui si può scegliere un'armatura tesa pari, ad esempio, a $5\text{Ø}20$ ($A_s = 5 \cdot 314 = 1570 \text{ mm}^2$); l'armatura compressa risulta, di conseguenza, pari a

$$A'_s = \alpha \cdot A_s = 0.5 \cdot 1570 = 785 \text{ mm}^2$$

equivalente, ad esempio, a $4\text{Ø}16$ ($A'_s = 4 \cdot 201 = 804 \text{ mm}^2$).

L'armatura disposta in zona tesa fornisce una percentuale rispetto all'area totale della sezione di conglomerato pari a

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot h} = \frac{1570}{300 \cdot 500} = 0.011 = 1.1\%$$

quindi superiore rispetto al minimo richiesto (0.25%).

È a questo punto semplice determinare i valori di sforzo normale e momento resistente corrispondenti alla sezione scelta, in condizioni di rottura bilanciata:

$$x = 0.259 \cdot d = 0.259 \cdot 410 \text{ mm} = 106 \text{ mm}$$

$$\varepsilon'_s : (x - d') = 0.0035 : x \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{106 - 40}{106} = 0.0022 > \varepsilon_{yd}$$

L'acciaio superiore è quindi snervato, di conseguenza

$$f'_s = f_{yd} = 374 \text{ MPa} \Rightarrow C' = A'_s \cdot f'_s = 804 \cdot 374 \text{ N} = 300696 \text{ N} = 300.7 \text{ kN}$$

$$f_s = f_{yd} = -374 \text{ MPa} \Rightarrow T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 250 \cdot (0.8 \cdot 106) = 280391 \text{ N} = 280.4 \text{ kN}$$

$$N_{\text{rd}} = C + C' + T = 280.4 + 300.7 - 587.2 = -6.1 \text{ kN}$$

$$M_{\text{rd}} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) = \\ = 280.4 \cdot (225 - 0.4 \cdot 106) + 300.7 \cdot (225 - 40) + 587.2 \cdot (410 - 225) = 215462 \text{ kNmm} = 215.5 \text{ kNm}$$

Quindi si è ottenuto un valore dello sforzo normale resistente non nullo (ma prossimo a zero) ed un valore del momento resistente leggermente più elevato (a causa delle necessarie approssimazioni introdotte, specialmente nella scelta delle armature).

Il calcolo di progetto può quindi dirsi concluso e la verifica della sezione è soddisfatta.

Volendo individuare esattamente il valore del momento resistente in assenza di sforzo normale, dovremmo risolvere l'equazione in x

$$N_{\text{rd}} = 0 \Rightarrow C + C' + T = 0$$

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) + A'_s \cdot f'_s - A_s \cdot f_s = 0$$

$$x = \frac{A_s \cdot f_s - A'_s \cdot f'_s}{0.85 \cdot 0.8 \cdot f_{cd} \cdot b} = \frac{A_s \cdot f_s - A'_s \cdot f'_s}{0.68 \cdot f_{cd} \cdot b}$$

quindi (dato che quasi certamente, pur essendo incognito x , entrambe le armature risulteranno snervate)

$$x = \frac{(A_s - A'_s) \cdot f_{yd}}{0.68 \cdot f_{cd} \cdot b} = \frac{(1570 - 804) \cdot 374}{0.68 \cdot 15.56 \cdot 250} = 108 \text{ mm}$$

ossia

$$\frac{x}{d} = \frac{108}{410} = 0.263 > 0.259$$

quindi siamo in presenza di una rottura non più bilanciata ma leggermente spostata verso la rottura lato calcestruzzo, con l'armatura compressa snervata:

$$\varepsilon'_s = 0.0035 \cdot \frac{x-d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{108-40}{108} = 0.0022 > \varepsilon_{yd}$$

In questa situazione di rottura si ha

$$C' = A'_s \cdot f'_s = 804 \cdot 374 \text{ N} = 300696 \text{ N} = 300.7 \text{ kN}$$

$$T = A_s \cdot f_s = -1570 \cdot 374 \text{ N} = -587180 \text{ N} = -587.2 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 250 \cdot (0.8 \cdot 108) = 285681 \text{ N} = 285.7 \text{ kN}$$

$$N_{\text{rd}} = C + C' + T = 285.7 + 300.7 - 587.2 = -0.8 \text{ kN}$$

$$M_{\text{rd}} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) =$$

$$= 285.7 \cdot (225 - 0.4 \cdot 108) + 300.7 \cdot (225 - 40) + 587.2 \cdot (410 - 225) = 216201 \text{ kNmm} = 216.2 \text{ kNm}$$

ovviamente maggiore (di circa l'8%) rispetto al momento sollecitante.

Esempio #3

Progetto e verifica di una sezione rettangolare presso-inflessa (pilastro)

Supponiamo di dover progettare una sezione rettangolare di base $b=300 \text{ mm}$, in grado di resistere ad un momento sollecitante $M_{\text{sdu}} = 40 \text{ tm} = 400 \text{ kNm}$ in presenza di uno sforzo normale pari a $N_{\text{sdu}} = 50 \text{ t} = 500 \text{ kN}$.

Conviene inizialmente individuare il valore dell'eccentricità

$$e = \frac{M_{\text{sdu}}}{N_{\text{sdu}}} = \frac{400}{500} \text{ m} = 0.8 \text{ m} = 800 \text{ mm}$$

valore che non risulta troppo piccolo da poter assimilare il regime di sforzo come prossimo ad una compressione semplice (ossia tale da trascurare la presenza del momento flettente), e, contemporaneamente, non così grande da ritenere la sezione come semplicemente inflessa (e quindi trascurare la presenza dello sforzo normale). Di conseguenza, la situazione individuata, corrisponde probabilmente ad una rottura che (ad eccentricità fissata) vede la posizione dell'asse neutro interna alla sezione.

Ci si può rendere conto dell'affermazione appena fatta, considerando il seguente calcolo.

Se si avesse soltanto sforzo normale, ed ipotizzando un'armatura compressa uguale a quella tesa, con una percentuale totale di armatura pari all'1%

$$\rho_s + \rho'_s = 0.01$$

si avrebbe (ipotizzando un valore di $d'=40 \text{ mm}$)

$$N_{\text{rd}} = 0.85 \cdot \frac{f_{\text{cd}}}{2.0} \cdot b \cdot h + (A_s + A'_s) \cdot f_{\text{yd}} \geq N_{\text{sdu}}$$

e quindi

$$0.85 \cdot \frac{f_{\text{cd}}}{2.0} \cdot b \cdot h + 0.01 \cdot b \cdot h \cdot f_{\text{yd}} \geq N_{\text{sdu}}$$

$$h \cdot \left[0.85 \cdot \frac{f_{\text{cd}}}{2.0} \cdot b + 0.01 \cdot b \cdot f_{\text{yd}} \right] \geq N_{\text{sdu}}$$

da cui

$$h \geq \frac{N_{\text{sdu}}}{b \cdot \left[0.85 \cdot \frac{f_{\text{cd}}}{2.0} + 0.01 \cdot f_{\text{yd}} \right]} = \frac{500000}{300 \cdot \left[0.85 \cdot \frac{15.56}{2.0} + 0.01 \cdot 374 \right]} \text{ mm} = 161 \text{ mm}$$

Ovviamente la sezione effettiva avrà dimensioni senz'altro maggiori, ma la valutazione effettuata ci permette di affermare che il valore dell'eccentricità è sufficientemente grande rispetto alla dimen-

sione trasversale della sezione che deriverà dal calcolo, per cui si può procedere ipotizzando una posizione dell'asse neutro interna alla sezione.

Effettuando quindi il calcolo di progetto, con le stesse ipotesi viste in precedenza, si ottiene

$$x = \frac{N_{sdu}}{0.68 \cdot f_{cd} \cdot b} = \frac{500000}{0.68 \cdot 15.56 \cdot 300} \text{ mm} = 158 \text{ mm}$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \approx 0.5\% = 0.005$$

$$\frac{\rho \cdot f_{yd}}{0.68 \cdot f_{cd}} \cdot d^2 + x \cdot \frac{d}{2} - x \cdot (e - 0.4 \cdot x) = 0$$

$$\frac{0.005 \cdot 374}{0.68 \cdot 15.56} \cdot d^2 + \frac{158}{2} \cdot d - 158 \cdot (800 - 0.4 \cdot 158) = 0$$

$$0.176 \cdot d^2 + 79 \cdot d - 116414 = 0$$

che fornisce la radice positiva

$$d = 619 \text{ mm}$$

Cercando di scegliere una sezione con lati multipli di 5 cm, si può scegliere $d=660 \text{ mm}$, $h=700 \text{ mm}$ (*), ottenendo

$$A_s = A'_s = 0.005 \cdot 300 \cdot 700 = 1050 \text{ mm}^2 \Rightarrow 3\varnothing 22 = 3 \cdot 380 \text{ mm}^2 = 1140 \text{ mm}^2$$

Tale armatura risulta contenuta nei limiti richiesti dalla Normativa: infatti è superiore al valore minimo pari a

$$A_l \geq 0.15 \cdot \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} = 0.15 \cdot \frac{500000}{374} = 201 \text{ mm}^2$$

e rappresenta, rispetto all'area di calcestruzzo, una percentuale pari a

$$\rho = \frac{A_s + A'_s}{b \cdot h} = \frac{1140 + 1140}{300 \cdot 700} = 0.011 = 1.1\%$$

quindi compresa fra lo 0.3% e il 6% della sezione effettiva. Si ottiene quindi:

$$x = \frac{N_{sdu}}{0.68 \cdot f_{cd} \cdot b} = \frac{500000}{0.68 \cdot 15.56 \cdot 300} \text{ mm} = 158 \text{ mm}$$

(che deriva dal fatto che la risultante C' uguaglia T), e quindi

$$\frac{x}{d} = \frac{158}{660} = 0.239$$

siamo cioè in condizioni di rottura lato acciaio: si ha

$$\varepsilon_c = 0.010 \cdot \frac{x}{d - x} = 0.010 \cdot \frac{158}{660 - 158} = 0.00315$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.00315 \cdot \frac{158 - 40}{158} = 0.00235 > \varepsilon_{yd} \Rightarrow f'_s = 374 \text{ MPa}$$

Di conseguenza

$$C' = A'_s \cdot f'_s = 1140 \cdot 374 \text{ N} = 426360 \text{ N} = 426.4 \text{ kN}$$

$$T = A_s \cdot f_s = -1140 \cdot 374 \text{ N} = -426360 \text{ N} = -426.4 \text{ kN}$$

$$C = 0.85 \cdot 15.56 \cdot 300 \cdot (0.8 \cdot 158) = 501530 \text{ N} = 501.5 \text{ kN}$$

$$N_{rd} = C + C' + T = 501.5 + 426.4 - 426.4 = 501.5 \text{ kN}$$

(*) L'espressione di progetto che si sta utilizzando è un'espressione approssimata. Conviene quindi, in generale, scegliere un'altezza della sezione sufficientemente maggiore di quella che deriva dal calcolo, onde evitare di dover successivamente modificare le dimensioni della sezione stessa in quanto insufficienti a resistere alle sollecitazioni di progetto (indicativamente conviene abbondare del 5-10% circa).

$$M_{\text{rdu}} = C \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + C' \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - T \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) =$$
$$= 501.5 \cdot (350 - 0.4 \cdot 158) + 426.4 \cdot (350 - 40) + 426.4 \cdot (660 - 350) = 408198 \text{ kNmm} = 408.2 \text{ kNm}$$

La sezione risulta quindi verificata, in quanto

$$(N_{\text{rdu}}, M_{\text{rdu}}) > (N_{\text{sdu}}, M_{\text{sdu}})$$

Stati limite nel cemento armato

Il taglio nel c.a.

La valutazione della resistenza a taglio di una sezione in cemento armato è piuttosto complessa, e l'approccio usuale adottato nella scienza delle costruzioni non è spesso applicabile.

L'analisi del problema viene effettuata per passi successivi: prima si analizza la distribuzione delle tensioni tangenziali in una trave senza armature specifiche che, come si vedrà in seguito, possono essere preposte ad assorbire lo sforzo di taglio; successivamente si analizza il comportamento della stessa trave nel caso in cui sia presente un'armatura specifica a taglio; infine si approfondiranno gli aspetti specifici legati alla condizione di stato limite ultimo per taglio, ossia del comportamento "a rottura" della trave per sollecitazioni taglianti.

Le tensioni da taglio in condizioni di esercizio

Come è noto dalla teoria della Scienza delle Costruzioni, gli sforzi di taglio in una trave sono sempre accompagnati dalla presenza di una flessione (la condizione $T \neq 0$ implica infatti $M \neq 0$, rappresentando lo sforzo di taglio la derivata della caratteristica di sollecitazione flettente).

La presenza del momento flettente provoca inoltre la parzializzazione della sezione a causa della pressoché nulla resistenza a trazione del calcestruzzo.

Considerando quindi una generica sezione della trave, l'unica componente della risultante relativa ad ogni sezione è una forza nel piano della sezione passante per il centro di taglio (e di solito accompagnata da momento flettente M).

Le tensioni tangenziali: si calcolano applicando la formula di Jourawski alla sezione parzializzata omogeneizzata a calcestruzzo

$$\tau = \frac{T \cdot S_{ci,x}}{J_{ci,x} \cdot b(y)}$$

dove

$S_{ci,x}$ = momento statico della sezione compresa tra lembo compresso e fibra dove si calcola τ

$J_{ci,x}$ = momento di inerzia sezione ideale equivalente

$b(y)$ = larghezza della sezione all'altezza dove si calcola τ

Sezione rettangolare

La tensione tangenziale massima τ_{max} si registra in corrispondenza dell'asse neutro e si mantiene costante fino all'acciaio in quanto al di sotto dell'asse neutro le tensioni normali σ sono nulle, per l'ipotesi di non resistenza a trazione del calcestruzzo. Di conseguenza, il momento statico della sezione, al di sotto dell'asse neutro, rimane costante fino a che non si incontrano le armature tese, che riportano il valore del momento statico a zero.

In corrispondenza dell'asse neutro (che è baricentrico) la tensione tangenziale τ è massima ed è pari a:

$$\tau_{max} = \frac{T}{b \cdot z}$$

infatti $S_{ci,x} = S_{cls} = nS_a$

$$J_{ci} = J_c + J_a = S_{cls} \cdot z_c + nS_a \cdot z_a = S_{cls} \cdot (z_c + z_a) = S_{cls} \cdot z_c = S_x \cdot z$$

quindi la τ_{max} si può riscrivere:

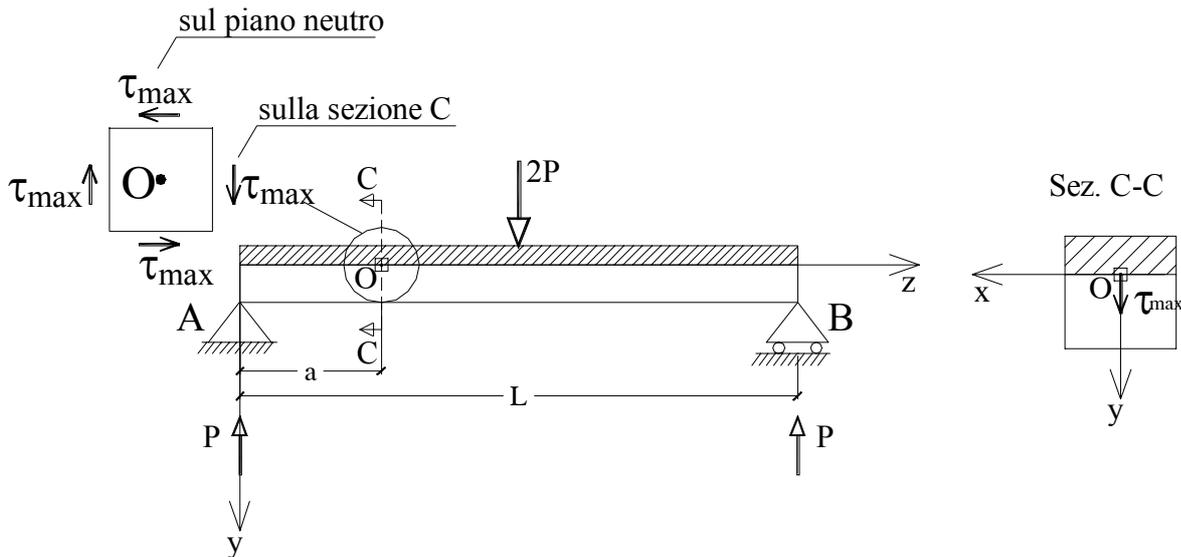
$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S_x}{J_x \cdot b} = \frac{T}{b \cdot z}$$

Il traliccio di Mörsch per la definizione dell'armatura a taglio

Alla fine dell'ottocento, primi del novecento, Mörsch propose di schematizzare il comportamento di travi di c.a. soggette a flessione e taglio con un traliccio di aste tese e compresse, di cui un corrente compresso di calcestruzzo, un tirante teso di acciaio ed un insieme di aste di parete inclinate a 45° rispetto all'orizzontale. Oggi la schematizzazione proposta da Mörsch è nota come **traliccio di Mörsch** ed è utilizzata, oltre che per il progetto delle armature a taglio di travi di c.a. nel metodo delle tensioni ammissibili, anche nel metodo agli stati limite per il calcolo del carico di collasso (seppure con alcune modifiche riguardanti in particolare l'inclinazione delle aste di parete). Inoltre questa schematizzazione è alla base della tecnica "strut-and-tie" messa a punto dalla scuola di Stoccarda del Prof. J. Schlaich per il progetto di elementi tozzi di c.a., laddove non è possibile applicare la teoria classica del De S. Venant, ed in particolare l'ipotesi di Bernoulli-Navier di conservazione delle sezioni piane.

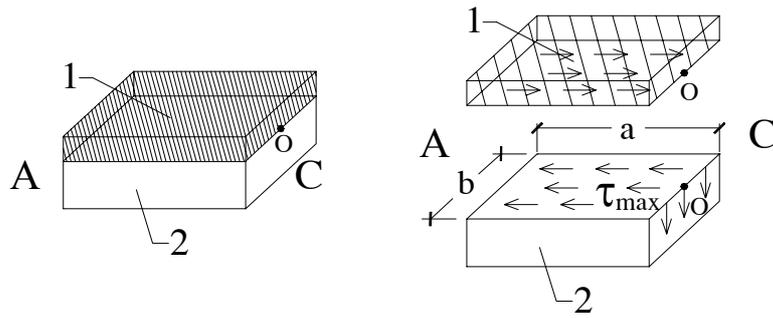
Come nasce l'idea di schematizzare una trave di c.a. con un traliccio di aste inclinate a 45° rispetto all'orizzontale? Per dare una risposta a questa domanda si consideri la trave illustrata nella figura seguente, dove si ipotizza che l'armatura longitudinale sia costante lungo tutta la trave, cosicché sia la posizione dell'asse neutro sia il braccio della coppia interna non variano lungo la trave.

Si prenda un punto O sull'asse neutro della sezione C posta a sinistra del carico; in O ci sarà solo la tensione tangenziale prodotta dal taglio, mentre quella normale è nulla perché O è sull'asse neutro.

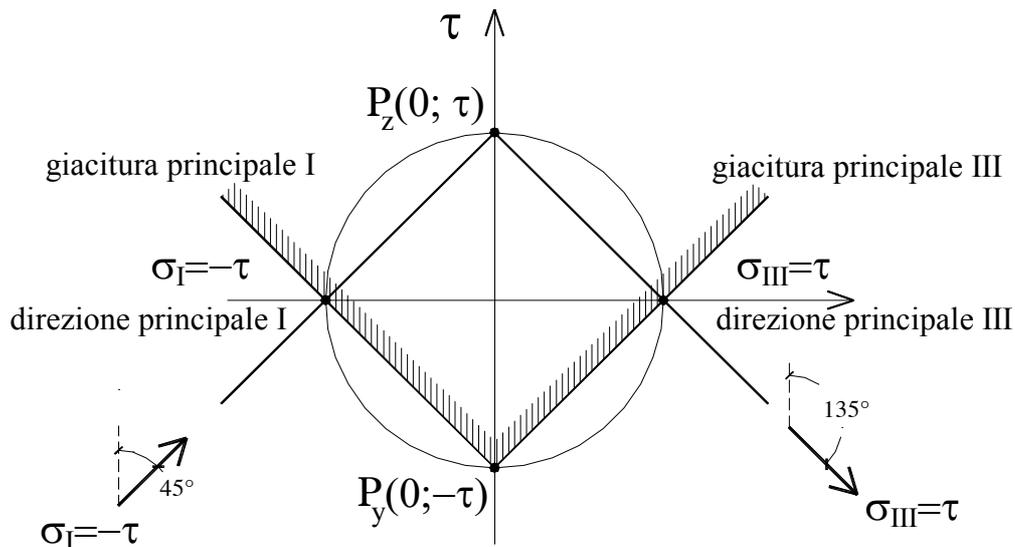


Sull'elementino infinitesimo del piano y-z centrato in O, per la reciprocità delle tensioni tangenziali, si hanno le tensioni rappresentate in alto a sinistra in figura: ossia accanto alle tensioni tangenziali sul piano verticale della sezione si hanno tensioni dello stesso tipo ed intensità sul piano neutro.

Pertanto dividendo la trave in due parti lungo questo piano, restano evidenziate le tensioni tangenziali orizzontali che le due parti si scambiano. In particolare le tensioni trasmesse nel tratto AC dalla parte superiore a quella inferiore sono dirette da destra verso sinistra (come illustrato nella figura seguente).

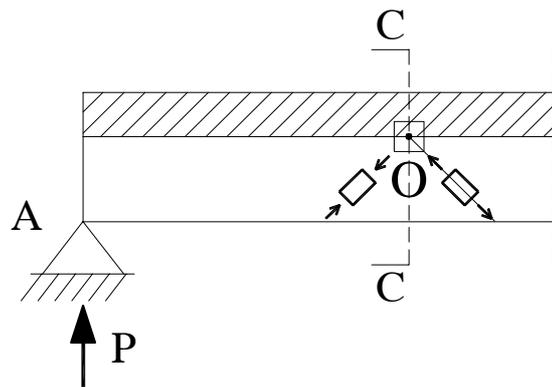


Se si traccia il circolo di Mohr dello stato tensionale nel punto O , si ottiene un cerchio centrato nell'origine del piano σ - τ , come rappresentato in figura, dove P_z e P_y sono i punti rappresentativi dello stato di tensione sulle giaciture di normale z e y .

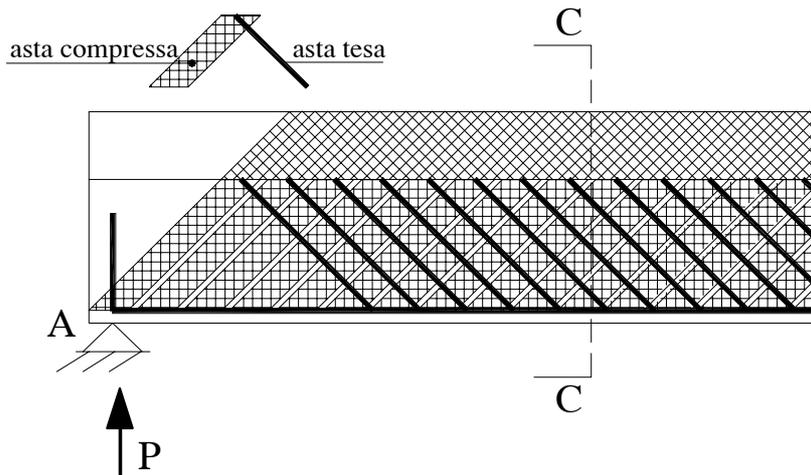


Dall'esame del circolo di Mohr risulta che il taglio puro provoca una tensione di trazione e una di compressione di uguale intensità τ .

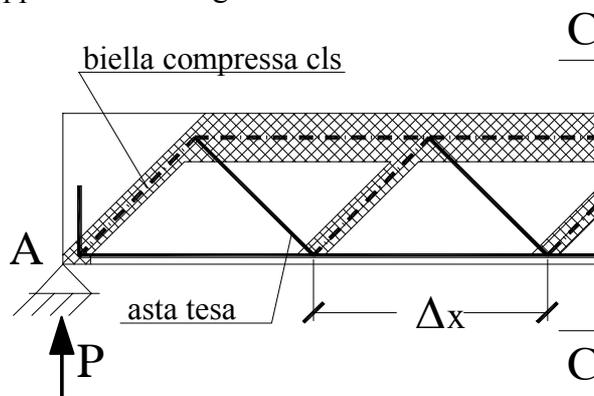
La direzione principale di compressione risulta inclinata di 45° in senso orario rispetto alla verticale ascendente, mentre quella principale di trazione è inclinata di 135° in senso antiorario rispetto alla stessa retta. Dal punto O si può allora immaginare che si dipartano verso la parte inferiore della trave due aste inclinate delle quali una sopporta la tensione principale di compressione e l'altra quella di trazione, come indicato nella figura seguente.



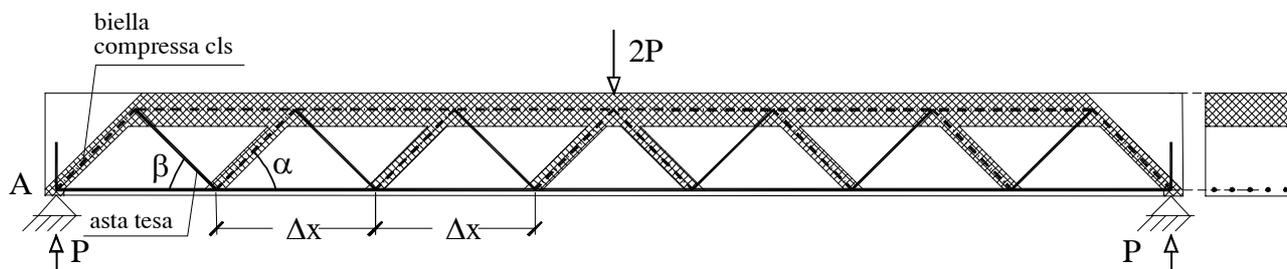
Lo stesso discorso può essere ripetuto per tutte le altre sezioni della trave, per cui lo sforzo di "scorrimento" presente sul piano neutro (ossia al risultante delle tensioni tangenziali sul piano orizzontale che contiene l'asse neutro) si può immaginare che venga trasmesso ai ferri inferiori attraverso un insieme continuo di bielle compresse e tese.



Discretizzando questo sistema continuo con un traliccio di aste compresse e tese poste ad interasse Δx si ottiene il traliccio rappresentato in figura:



che esteso a tutta la trave assume la seguente configurazione:



Passando alla destra del carico cambia il segno del taglio e pertanto la direzione delle aste compresse e quella delle aste tese si scambiano.

Nel traliccio di Morsch le aste compresse sono formate da cls (corrente superiore e puntoni inclinati, in generale, di un angolo α , solitamente 45°), mentre le aste tese sono formate da apposite armature disposte secondo un certo angolo β (quello naturale è a 45° secondo le direzioni della trazione).

Se si indica con Δx l'interasse tra le armature resistenti a taglio e si considera un concio di lunghezza Δx ad es. alla sinistra del carico $2P$, si può valutare l'ammontare dello sforzo di scorrimento su tale elemento. Infatti, essendo il taglio costante e pari a P , per l'ipotesi che il braccio della coppia interna z non vari, anche le tensioni tangenziali sul piano neutro di questo concio si mantengono costanti e pari a τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{b \cdot z}$$

Lo scorrimento totale sul concio è dato dal prodotto delle tensioni tangenziali per l'area della porzione di piano neutro compresa nel concio:

$$\Omega = \tau_{\max} \cdot b \cdot \Delta x .$$

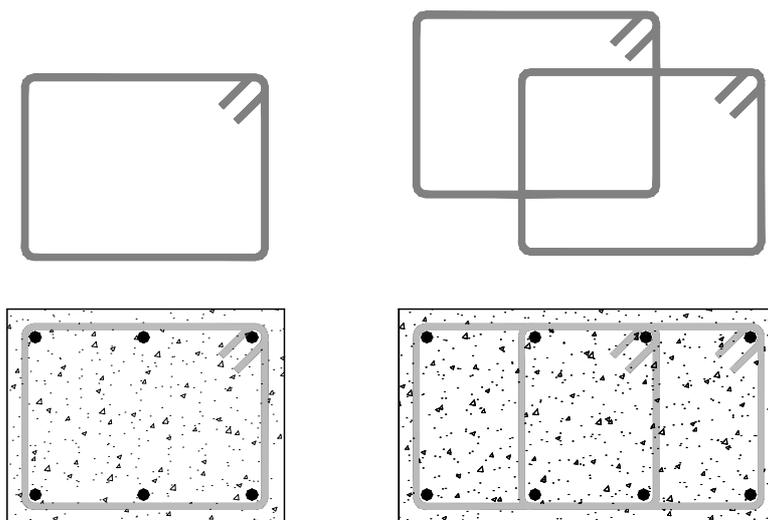
Nello schema individuato, questo sforzo viene trasferito all'armatura inferiore mediante le due aste di parete tesa e compressa. In realtà, come verrà evidenziato nel successivo paragrafo, è possibile il trasferimento di tale sforzo anche in assenza di armature specifiche resistenti al taglio, facendo affidamento, almeno in parte, sulla resistenza a trazione del calcestruzzo: nell'ottica del metodo agli stati limite, si individua quindi il valore del taglio ultimo che una sezione può assorbire in funzione della presenza o meno di armatura a taglio nella trave.

Nel caso in cui si dispongano armature atte ad assorbire lo sforzo di taglio, queste dovrebbero naturalmente seguire l'inclinazione delle direzioni su cui si ha trazione (o, come si dice nell'ambito della Scienza delle Costruzioni, la direzione delle "isostatiche di trazione", ossia delle linee che hanno per tangente la direzione principale di trazione). In questo caso si dovrebbero quindi disporre "ferri piegati" a 45°, in misura e numero consono all'assorbimento dello sforzo. Tali armature sono state effettivamente disposte nelle travi in c.a., anche se oggi non si usano praticamente più e si preferisce procedere attraverso la disposizione di armature diverse, ossia costituite da "staffe" verticali a due o più "bracci".

Le staffe sono costituite da elementi chiusi in acciaio, di diametro abbastanza piccolo (solitamente Ø8 o Ø10, raramente più grossi, a causa della difficoltà dell'operazione di piegatura), sagomate come in figura e disposte ad un "passo" di solito nell'intervallo 10÷30 cm e comunque al massimo paragonabile all'altezza della sezione. Tali armature, anche se meno efficienti dei ferri piegati nell'assorbimento dello sforzo di taglio, presentano almeno tre vantaggi:

- risultano di più facile confezionamento, permettendo l'assemblaggio di "gabbie" di armature a piè d'opera che vengono successivamente inserite nella cassera (e quindi conducono generalmente a costi di manodopera inferiori);
- rappresentano per il calcestruzzo compresso una sorta di "confinamento" che conferisce alla trave (nella sua componente compressa) una maggiore duttilità e resistenza;
- contrastano la possibile instabilità delle armature compresse riducendone la lunghezza libera di inflessione.

Le staffe vengono individuate quindi da tre parametri: il diametro Ø, il numero dei bracci ed il passo, per cui nei disegni di carpenteria del c.a. si trovano, ad esempio, diciture del tipo "st. Ø8/10" a due bracci", dove la scrittura /10" indica, convenzionalmente, il passo a cui tali elementi sono disposti.



(a)

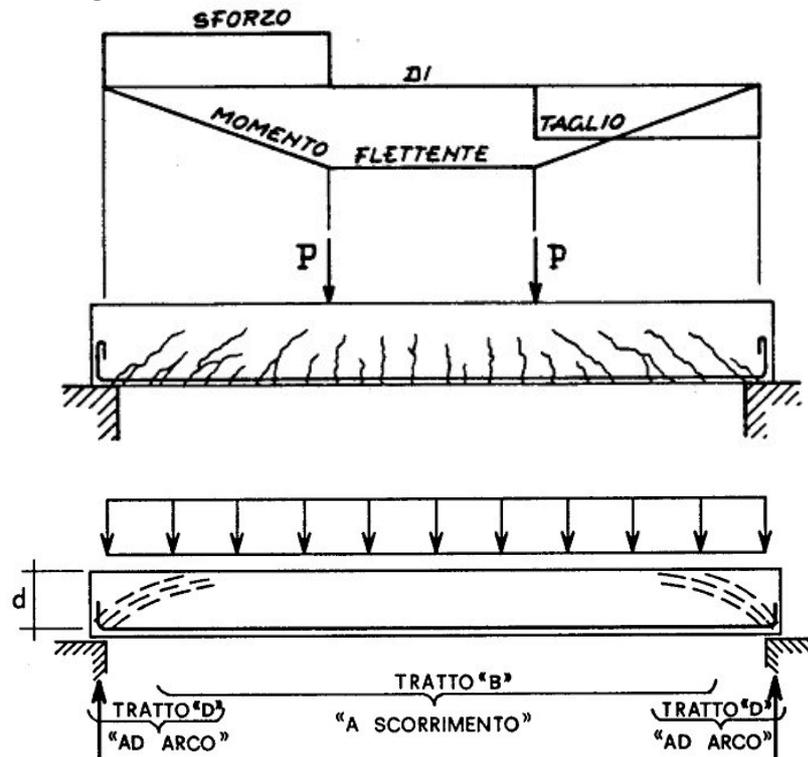
(b)

Staffa a due bracci (a) e a quattro bracci (b)

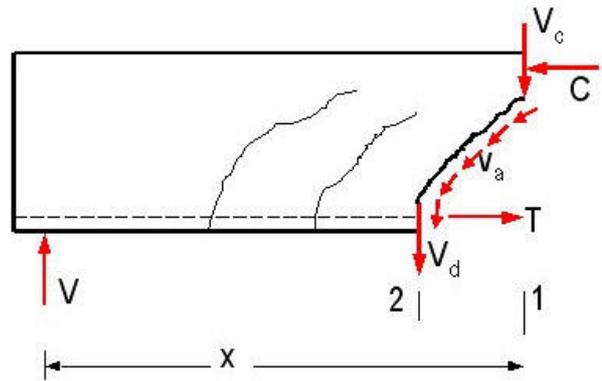
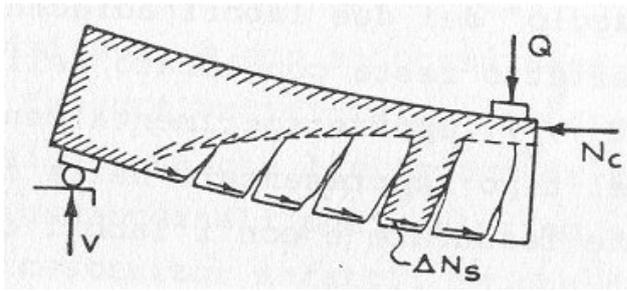
SLU: meccanismi resistenti in elementi non armati a taglio

Una serie di risultati sperimentali hanno mostrato che il comportamento di una trave in c.a. sottoposta a taglio è abbastanza complesso e dipende (anche se solo in parte) dalla resistenza a trazione del calcestruzzo.

In particolare, anche senza la presenza di un'armatura specifica destinata ad assorbire lo sforzo di taglio, si ha comunque una resistenza non trascurabile nei confronti del taglio, sebbene in presenza delle inevitabili fessure dovute all'azione flettente. Con riferimento all'esempio di una trave appoggiata con un tratto sottoposto a momento flettente costante, si individuano due zone distinte, caratterizzate da un diverso andamento delle fessure e da due conseguenti modelli di comportamento nei confronti dell'azione tagliante.



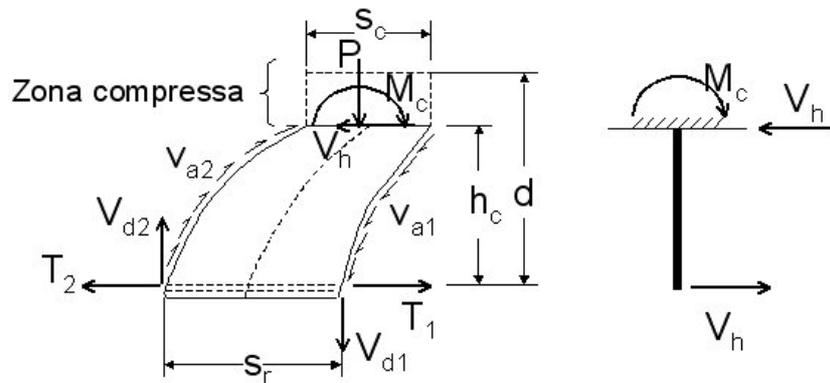
- nel tratto centrale, in cui le fessure dovute al momento flettente hanno andamento pressoché verticale, si individua un meccanismo resistente definito "a pettine" (o anche "effetto mensola"), in cui le parti di calcestruzzo comprese tra due fessure consecutive si comportano come mensole incastrate nella parte superiore della trave (che risulta, a causa del momento positivo, compressa);
 - nei due tratti laterali (in cui le fessure tendono a disporsi, a causa della progressiva diminuzione di momento flettente, secondo inclinazioni a 45°), nascono dei meccanismi diffusivi che vengono definiti "ad arco", che consentono allo sforzo di taglio di trasferirsi verso gli appoggi dalla zona compressa della trave, che appunto si atteggia secondo un arco all'interno della trave stessa.
- Lo studio della resistenza a taglio è normalmente condotto nelle zone in cui prevale il comportamento a pettine, in quanto sufficientemente lontano da zone di discontinuità dovute alla presenza dei carichi concentrati rappresentati dagli appoggi.



Nelle zone di comportamento “a pettine” (o tratti a scorrimento), il taglio esterno V è trasmesso dalle singole “mensole” di calcestruzzo, con ulteriori contributi alla resistenza dovuti a:

- un’azione bietta o spinotto (“dowel action”) esercitata dall’armatura longitudinale inferiore V_d ;
- la componente verticale delle forze di attrito che sono esercitate sulle due superfici separate da una fessura quando due conci d’anima tendono a scorrere l’uno sull’altro V_a (ingranamento degli inerti o “aggregate interlock”);
- una forza di taglio trasmessa attraverso la parte compressa della sezione V_c (contributo della compressione assiale).

Il comportamento a pettine è schematizzabile attraverso lo schema seguente, in cui si assimila il funzionamento del calcestruzzo compreso tra due fessure a quello di una mensola incastrata nella parte compressa della trave, ed in cui si sono evidenziati anche i due contributi V_a e V_d :



Schema del comportamento “a mensola” dei denti di calcestruzzo

Il momento flettente M_c a cui è sottoposta la mensola corrisponde al valore

$$M_c = V_h \cdot h_c = (T_1 - T_2) \cdot (d - x)$$

dove x rappresenta l’altezza della zona compressa della trave e $T_1 - T_2$ è la differenza di trazione nell’armatura tesa (dovuta allo scorrimento)

$$T_1 - T_2 = \frac{V}{z} \cdot s_c$$

e quindi si ha

$$M_c = \frac{V}{z} \cdot s_c \cdot (d - x)$$

Il massimo momento che la mensola può sopportare è legato alla resistenza del calcestruzzo. Dal momento che nella sezione rettangolare di incastro (di dimensione $s_c \times b$, essendo b la larghezza della trave) la tensione massima è pari a (nell'ipotesi di sezione interamente reagente):

$$f_{c,max} = \frac{M_c}{W} = \frac{M_c}{\frac{s_c^2 \cdot b}{6}} = \frac{6 \cdot M_c}{s_c^2 \cdot b}$$

Il massimo momento corrisponde a quello per cui si raggiunge la resistenza a trazione del calcestruzzo (per sollecitazioni di flessione), che può essere stimata in

$$f_{cfd} = 1.2 \cdot f_{ctd}$$

Si ha quindi

$$M_{c,max} = \frac{f_{cfd} \cdot s_c^2 \cdot b}{6}$$

che corrisponde ad un valore massimo del taglio V trasmesso attraverso la mensola pari a

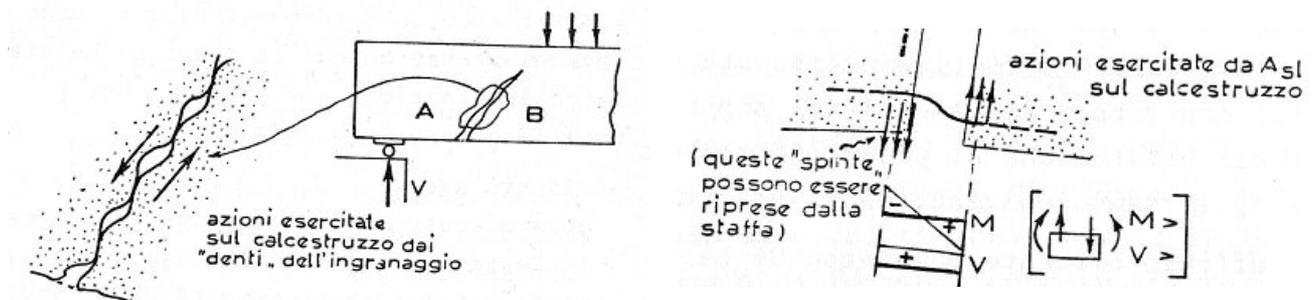
$$V_{c,max} = \frac{M_{c,max} \cdot z}{s_c \cdot (d-x)} = \frac{f_{cfd} \cdot s_c \cdot b \cdot z}{6 \cdot (d-x)}$$

Approssimando l'ampiezza della zona compressa in $x \approx 0.3d$, e quindi $z = d - x/3 \approx 0.9d$, ed ipotizzando che $s_c \approx d$, come emerge da numerose rilevazioni sperimentali, si ottiene

$$V_{c,max} \approx \frac{1.2 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot 0.9d}{6 \cdot 0.7d} \approx \frac{1.2 \cdot 0.9}{6 \cdot 0.7} \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b = 0.25 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b$$

che rappresenta una stima della resistenza a taglio della trave in calcestruzzo dovuta al solo effetto "pettine" (o mensola).

I contributi dovuti agli altri effetti precedentemente indicati (effetto bietta, effetto ingranamento, effetto dovuto alla compressione assiale) vengono tenuti in conto introducendo dei fattori correttivi alla resistenza appena ricavata.



Effetto di "ingranamento degli inerti" (a sinistra) ed effetto "bietta" (a destra)

L'effetto dell'ingranamento degli inerti è dovuto alle pressioni di contatto lungo la superficie della fessura che delimita i denti di calcestruzzo, ed è quindi un contributo che dipende dall'attrito lungo le due superfici di contatto (tanto maggiore quanto più elevata è la scabrezza della superficie di fessurazione), dalla presenza eventuale di uno sforzo normale (che ovviamente favorisce l'effetto di ingranamento), dall'altezza della trave (l'effetto tende a diminuire per travi di altezza elevata, data la tendenza della fessura ad "aprirsi" tanto più quanto ci si allontana dalla zona compressa di estradosso della trave).

Da un punto di vista sperimentale, si osserva che l'effetto tende ad annullarsi per travi con altezza superiore a 60 cm, mentre riveste un ruolo anche rilevante per altezze inferiori. Il contributo

dell'ingranamento viene quindi usualmente considerato attraverso l'introduzione di un coefficiente amplificativo della resistenza di base, r , quantificabile in

$$r = 1.6 - d$$

con d espresso in m e $r \geq 1$ (ossia la formula vale solo per $d \leq 0.6$ m).

L'effetto bietta rappresenta il contributo dovuto alla presenza delle armature longitudinali all'interno delle fessure, che tendono a fornire un aumento di resistenza a causa della loro rigidità flessionale. L'effetto è limitato dal fatto che le spinte "a vuoto" che nascono nel calcestruzzo (si veda la parte sinistra della figura precedente) possono condurre alla rottura del calcestruzzo stesso ("sfondellamento"); l'effetto può essere quantificato in dipendenza dall'area dell'armatura longitudinale (tanto maggiore è l'area dell'armatura, tanto più elevato risulterà tale effetto) e dall'area del calcestruzzo all'interno del quale tale armatura è collocata.

L'incremento di resistenza al taglio può ancora essere espresso attraverso un coefficiente moltiplicativo della resistenza di base, quantificabile in

$$K_{\text{bietta}} = 1 + 50 \cdot \rho_1$$

dove

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b \cdot d}$$

rappresenta il rapporto geometrico di armatura (ossia il rapporto tra l'area dell'armatura longitudinale A_{sl} e l'area del calcestruzzo). Il valore di K_{bietta} deve risultare comunque non maggiore di 2.

Infine, l'effetto benefico dell'eventuale presenza di una compressione assiale può essere tenuto in conto introducendo un terzo coefficiente amplificativo della resistenza, δ , pari a

$$\delta = 1 + \frac{M_0}{M_{sdu}}$$

in cui M_0 rappresenta il momento di decompressione nella sezione analizzata, nella quale agisce M_{sdu} . In presenza di uno sforzo di compressione, il momento di decompressione rappresenta il valore del momento flettente per cui si ottiene il passaggio, nella fibra più esterna del calcestruzzo, da una tensione di compressione ad una di trazione. È evidente che l'effetto si perde se non agisce sforzo normale nella sezione (quindi, se $N=0$, si assume $\delta=1$) mentre l'eventuale presenza di uno sforzo normale di trazione non solo annulla l'effetto specifico, ma rende di fatto nulla l'intera resistenza a taglio della trave, non potendosi attivare i vari meccanismi descritti. In presenza di sforzo normale di trazione si assumerà quindi $\delta=0$.

Ricapitolando, la resistenza a taglio di una trave senza armature specifiche per resistere a tale sollecitazione può essere stimata con l'espressione riportata nel seguente prospetto:

Normativa



Nel caso di assenza di armature a taglio occorrerà valutare che

$$V_{rd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{rd} = 0.25 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot r \cdot (1 + 50 \cdot \rho_1) \cdot \delta$$

Elementi senza armatura resistente a taglio: considerazioni aggiuntive

Regola della traslazione dei momenti

Osservando il comportamento della parte di trave che viene isolata dalla presenza di una fessura, si nota che la tensione T nell'armatura longitudinale nella sezione 2 (più vicina all'appoggio) è determinata dal momento flettente della sezione 1 (dove, in generale, $M_1 > M_2$).

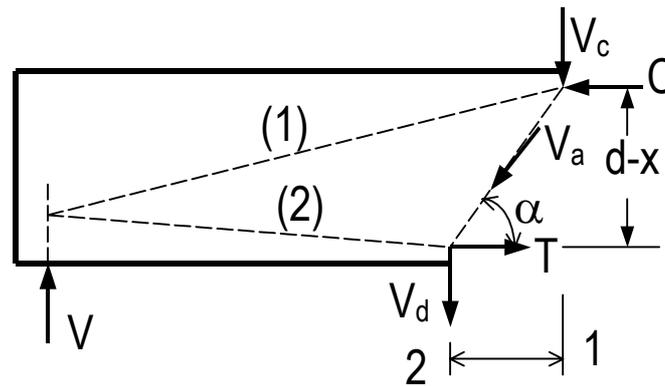
Nel progetto dell'armatura longitudinale nella sezione 2 occorre quindi considerare il momento agente nella sezione 1 (regola della traslazione del diagramma del momento flettente). Infatti si ottiene (dall'equilibrio alla rotazione)

$$T = \frac{M_2}{z} + V \cdot \cot g(\alpha) = \frac{M_2 + V \cdot z \cdot \cot g(\alpha)}{z}$$

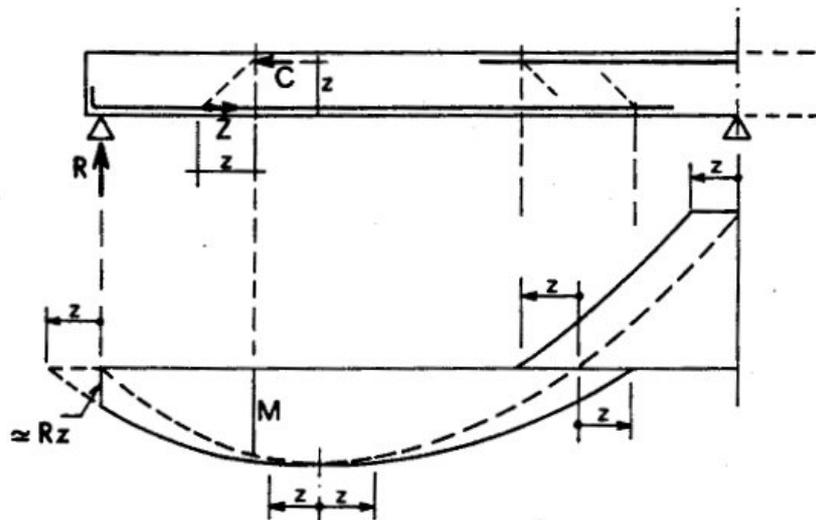
e quindi lo sforzo di trazione T è quello che competerebbe alla sezione che si trova in una posizione "traslata" della quantità $z \cdot \cot g(\alpha)$.

Se α è supposto di circa 45° , la distanza tra le sezioni 1 e 2 è circa uguale al braccio della coppia interna z (in questo caso infatti $\cot g(\alpha)=1$). Ancora più cautelativamente si può porre $z \approx d$, essendo d l'altezza utile della sezione, ovviamente operando a favore della sicurezza

$$z \cdot \cot g(\alpha) \approx z \approx d$$



In conseguenza della presenza delle fessure dovute al taglio, si deve quindi considerare un nuovo diagramma dei momenti flettenti, simile a quello riportato in figura

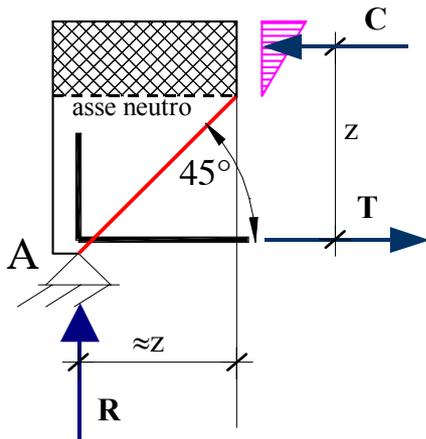


Regola della traslazione del momento

Prescrizioni in prossimità degli appoggi della trave

Dalla figura precedente, si nota come sull'estremo appoggiato a momento nullo, vada portata una quantità d'armatura "flessionale" (ossia longitudinale) pari alla reazione dell'appoggio R stessa essendo la forza $T=M/z$ calcolata in base al momento $M \approx R \cdot z$.

Infatti, se si considera lo stesso ragionamento effettuato in precedenza, l'equilibrio dell'elemento che si ottiene isolando la porzione di trave interrotta dalla presenza della prima fessura individua la condizione riportata nel seguito.



La condizione di equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante C delle azioni di compressione impone che

$$T \cdot z \approx R \cdot z$$

da cui

$$T \approx R$$

le armature longitudinali, cioè, anche se non devono assorbire trazione a causa dell'assenza di momento flettente, devono comunque essere dimensionate in modo da resistere ad una trazione pari alla reazione di appoggio, ossia al taglio presente all'appoggio sulla trave.

Minimi di armatura trasversale

Molte delle prescrizioni normative prevedono che, ad esclusione di alcuni elementi (ad esempio, piastre, in cui si ha un'adeguata capacità di ripartizione trasversale dei carichi), è in genere necessario disporre una quantità minima di armatura a taglio anche quando il calcolo non lo richiederebbe. La normativa italiana prevede un minimo di staffe di area complessiva A_{st} pari a

Normativa



L'area minima delle staffe deve risultare pari a

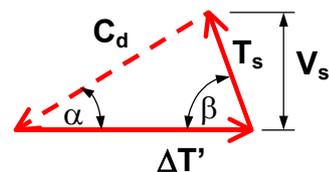
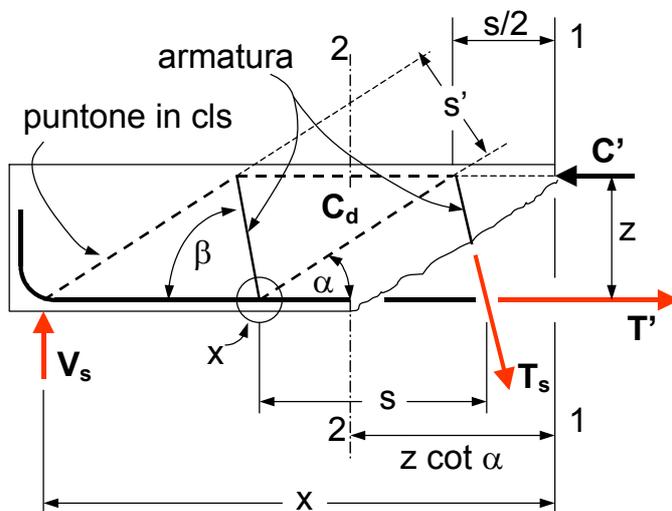
$$A_{st} = 0.10 \cdot \left(1 + 0.15 \cdot \frac{d}{b} \right) \cdot b$$

espressa in cm^2/m e dove b e d sono espressi in m , con un minimo di tre staffe a metro e passo non superiore a $0.8 d$.

SLU: meccanismi resistenti in elementi armati a taglio

Nel caso in cui siano presenti specifiche armature resistenti al taglio, per la determinazione degli sforzi si ricorre all'analogia del traliccio di Morsch, nella quale, analogamente a quanto fatto in precedenza, si immagina di avere una trave isostatica con le seguenti caratteristiche:

- montanti tesi inclinati di un angolo β sull'orizzontale (staffe o ferri piegati);
- puntoni compressi inclinati di un angolo α (puntoni di calcestruzzo);
- corrente superiore corrispondente al calcestruzzo compresso;
- corrente inferiore corrispondente all'armatura inferiore tesa.



Traliccio di Morsch allo Stato Limite Ultimo

La definizione dell'inclinazione generica α per le bielle compresse anziché 45° , come si è supposto fino ad ora, nasce dall'evidenza che l'effetto di ingranamento degli inerti fa sì che la risultante delle compressioni nel calcestruzzo possa trovarsi ad un'inclinazione inferiore rispetto all'angolo ideale offerto dal circolo di Mohr; le forze inclinate dovute all'ingranamento di fatto abbassano tale angolo, per cui si può impostare il problema in termini generali considerando un'inclinazione generica α .

L'equilibrio alla traslazione verticale del nodo X impone che

$$V_s = C_d \cdot \sin(\alpha) = T_s \cdot \sin(\beta)$$

dove

V_s taglio esterno

C_d compressione nel puntone

T_s risultante di tutte le forze nelle armature attraversate da una fessura

Dalla figura precedente si osserva inoltre che

$$s = z \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

$$s' = s \cdot \sin(\alpha)$$

Le bielle compresse, di spessore b e nelle quali agisce una tensione normale pari a f_c , sono in grado di fornire una risultante di compressione pari a

$$C_d = f_c \cdot b \cdot s' = f_c \cdot b \cdot s \cdot \sin(\alpha) = f_c \cdot b \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

e quindi possono equilibrare un taglio esterno pari a

$$V_s = C_d \cdot \sin(\alpha) = f_c \cdot b \cdot z \cdot \sin^2(\alpha) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]$$

Analogamente, se nelle armature, di area A_{sw} e disposte ad un passo s , agisce una tensione f_s , si ha

$$T_s = f_s \cdot A_{sw} = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot s}{s} = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot z \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]}{s}$$

e conseguentemente possono assorbire uno sforzo di taglio pari a

$$V_s = T_s \cdot \sin(\beta) = \frac{f_s \cdot A_{sw} \cdot z \cdot \sin(\beta) \cdot [\cot g(\alpha) + \cot g(\beta)]}{s}$$

Il valore massimo del taglio che la trave può assorbire allo SLU è quindi offerto dalle relazioni precedenti, in cui alle tensioni indicate si sostituiscono i massimi valori delle tensioni che possono essere tenuti in conto nella verifica.

Si individuano cioè due valori del taglio resistente: il primo (detto taglio-compressione) è relativo alla massima resistenza delle bielle compresse in calcestruzzo; il secondo (taglio-trazione) è dovuto alla resistenza offerta dalle armature trasversali. E' evidente che il taglio resistente ultimo della trave sarà offerto dal più piccolo di questi due valori.

SLU: verifica a taglio in elementi con armature

Nella normativa vigente si procede analogamente a quanto descritto in precedenza, con due sole modifiche:

- si considera il cosiddetto metodo "normale" nel quale si fissa l'inclinazione delle bielle compresse in $\alpha=45^\circ$ (*);

(*) In alcune Normative (ad esempio nell'Eurocodice 2) è possibile anche fare riferimento a schemi di calcolo in cui, per quanto osservato in precedenza, si considerano inclinazioni diverse da 45° per i puntoni compressi, introducendo il metodo che prende il nome di "traliccio ad inclinazione variabile" e che non verrà riportato nelle presenti dispense.

- si tiene in conto, nella valutazione del taglio-trazione, anche del contributo offerto dal calcestruzzo teso (in maniera analoga a quanto fatto nella verifica a allo SLU per elementi senza armature a taglio).

Taglio-compressione

L'espressione individuata in precedenza può essere modificata introducendo, al posto di z , il valore approssimato $z \approx 0.9d$, ed imponendo la condizione $\alpha=45^\circ$, ottenendo

$$V_{Rd} = \frac{0.9}{2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)] = 0.45 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)]$$

In realtà la normativa impone un limite un po' più restrittivo, in quanto il coefficiente 0.45 viene posto pari a 0.30; tale correzione deriva dall'evidenza sperimentale che non è possibile attingere all'intera resistenza a compressione del calcestruzzo per la presenza delle fessurazione.

Normativa



Nel caso di presenza di armature a taglio occorrerà valutare che

$$V_{Rd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{Rd} = 0.30 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot [1 + \cot g(\beta)]$$

Taglio-trazione

In questo caso si assume che il taglio-trazione possa essere valutato mediante l'espressione

$$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd}$$

in cui V_{cd} tiene in conto del contributo offerto dal calcestruzzo teso mentre V_{wd} quantifica l'apporto alla resistenza a taglio dovuto alla presenza delle armature trasversali.

Il valore di V_{cd} si può stimare con

$$V_{cd} = 0.60 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot \delta$$

Come si può osservare, il taglio resistente lato calcestruzzo è lo stesso utilizzato nel caso di sezioni senza armature resistenti al taglio, con il coefficiente 0.60 al posto di 0.25 r ($1+50\rho_1$). In altre parole, si considera forfaitariamente il contributo offerto dall'effetto bietta e dall'ingranamento degli inerti.

Per V_{wd} , l'espressione proposta dalla normativa corrisponde a quella individuata in precedenza, con $z \approx 0.9d$ ed imponendo la condizione $\alpha=45^\circ$,

$$V_{wd} = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot \sin(\beta) \cdot [1 + \cot g(\beta)] = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot [\sin(\beta) + \cos(\beta)]$$

in cui con f_{ywd} si individua la tensione di snervamento di calcolo dell'armatura trasversale; nella Normativa Italiana si consiglia di sostituire tale valore con $0.8 f_{ywd}$ quando si considerino barre a taglio rialzate, cioè barre piegate.

Normativa



Nel caso di presenza di armature a taglio occorrerà valutare che

$$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd} \geq V_{sdu}$$

con

$$V_{cd} = 0.60 \cdot f_{ctd} \cdot d \cdot b \cdot \delta$$

$$V_{wd} = 0.90 \cdot \frac{f_{ywd} \cdot A_{sw}}{s} \cdot d \cdot [\sin(\beta) + \cos(\beta)]$$

Elementi con armatura resistente a taglio: considerazioni aggiuntive

Verifica armatura longitudinale

Analogamente a quanto visto nel caso della verifica della trave senza armature resistenti a taglio, va prevista un'opportuna traslazione del diagramma del momento flettente, che comporta la verifica delle armature longitudinali per una sollecitazione aggiuntiva rispetto a quella flessionale effettivamente presente. La normativa prescrive che occorre prevedere una traslazione del diagramma del momento flettente nel verso che dà luogo ad un aumento del momento stesso, quantificabile in

$$M_{sdu}(V) = M_{sdu} + V \cdot a_1$$

dove

$$a_1 = 0.9 \cdot d \cdot [1 - \cot g(\beta)] \geq 0.2 \cdot d$$

Prescrizioni sull'armatura trasversale

Nella verifica a taglio è evidente il ruolo fondamentale che rivestono le armature resistenti a taglio, soprattutto le staffe, in quanto:

- incrementano l'efficienza dei meccanismi resistenti a taglio, specialmente l'effetto spinotto;
- limitano la fessurazione diagonale favorendo l'effetto di ingranamento degli inerti;
- aumentano l'azione di confinamento, aumentando la resistenza a compressione del calcestruzzo e quindi aumentando la resistenza delle parti di trave in cui è presente l'effetto arco;
- prevengono la perdita di aderenza nelle zone dove si sviluppa le fessure da spacco "splitting cracking", a causa dell'effetto bietta e delle tensioni di aderenza.

Di conseguenza, in molte indicazioni normative si prevede che, in caso di necessità di inserire un'armatura a taglio, sia comunque presente una certa percentuale del taglio ultimo affidato alle staffe. Nell'Eurocodice 2 è riportato espressamente che "nelle travi le armature rialzate non devono essere utilizzate come armatura a taglio se non in combinazione con le staffe; almeno il 50% del valore di V_{Sdu} deve essere assorbito da staffe verticali".

Nella normativa italiana esiste ancora una prescrizione simile, anche se leggermente diversa, in quanto si prescrive che "la resistenza di calcolo dell'armatura d'anima deve risultare non inferiore alla metà del taglio di calcolo", quindi non effettuando una differenziazione tra staffe verticali e ferri piegati.

Appendice: verifica alle Tensioni Ammissibili

La Normativa impone il progetto dell'armatura a taglio solo se la τ_{max} , valutata secondo l'espressione

$$\tau_{max} = \frac{T}{b \cdot z},$$

supera un valore limite (τ_{c0}):

- se $\tau_{max} \leq \tau_{c0}$ occorre adottare un'armatura minima (necessaria per contrastare comunque l'instabilità delle barre longitudinali compresse e per esplicare un'azione di confinamento sul calcestruzzo), perché il calcestruzzo è in grado di trasferire valori bassi delle tensioni tangenziali dal cls compresso all'armatura tesa. Tale armatura minima vale per il caso delle travi;
- se $\tau_{max} > \tau_{c0}$ occorre progettare l'armatura a taglio e comunque deve risultare $\tau_{max} < \tau_{c1}$, affinché non si verifichi la rottura delle bielle compresse di cls (altrimenti è necessario ridefinire le dimensioni geometriche della sezione).

I due valori delle tensioni tangenziali ammissibili sono rispettivamente pari a:

$$\tau_{c0} = 0.4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} \text{ N/mm}^2 \quad \left[\tau_{c0} = 4 + \frac{R_{ck} - 150}{75} \text{ kg/cm}^2 \right]$$

$$\tau_{cl} = 1.4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} \text{ N/mm}^2 \quad \left[\tau_{cl} = 14 + \frac{R_{ck} - 150}{35} \text{ kg/cm}^2 \right]$$

Il calcolo dell'armatura a taglio, nel caso in cui

$$\tau_{c0} \leq \tau_{max} \leq \tau_{cl}$$

avviene utilizzando lo schema del traliccio di Mörsch in cui si considerano bielle compresse a 45° ed elementi tesi con la stessa inclinazione delle armature effettivamente presenti nella trave, quindi ferri piegati a 45° o staffe.

Normativa



La Normativa consente di utilizzare solo staffe oppure staffe e ferri piegati insieme; non è consentito l'utilizzo di soli ferri piegati!

In ogni caso almeno il 40 % dello sforzo di scorrimento deve essere assorbito da staffe.

Armatura a taglio minima (per elementi inflessi monodimensionali, ad es. travi):

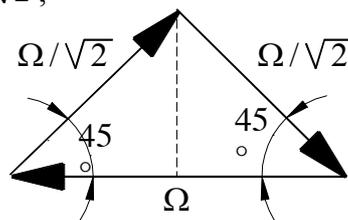
- almeno tre staffe al metro
- passo non superiore a 0,8 d (d = altezza utile)
- area minima pari a 0,10 β* cm²/m, dove β* è la larghezza corrispondente a τ_{c0} (ossia la larghezza dalla base della sezione per cui si giunge alla condizione τ_{max}=τ_{c0})
- in prossimità di carichi concentrati o zone di appoggio per un tratto pari all'altezza utile della sezione da ciascuna parte del carico concentrato il passo deve essere non superiore a 12 φ_l, essendo φ_l il diametro minimo dell'armatura longitudinale

Ferri piegati

Lo sforzo di scorrimento Ω, dato dalla relazione vista in precedenza

$$\Omega = \tau_{max} \cdot b \cdot \Delta x = \frac{T}{b \cdot z} \cdot b \cdot \Delta x = \frac{T \cdot \Delta x}{z},$$

viene trasferito all'armatura inferiore mediante le due aste di parete inclinate a 45°; dal triangolo delle forze trasmesse al nodo risulta che nella biella compressa si ha uno sforzo pari a $-\Omega/\sqrt{2}$ e nell'asta tesa uno sforzo pari a $\Omega/\sqrt{2}$;



sostituendo l'espressione di Ω trovata sopra, la forza di trazione F_a in ogni ferro inclinato a 45° si può scrivere nella seguente forma:

$$F_a = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \sqrt{2}};$$

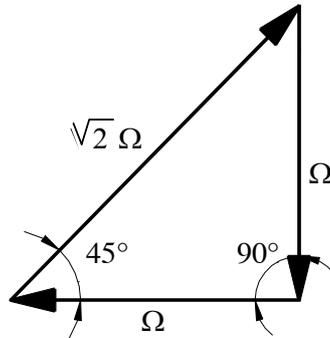
se $\bar{\sigma}_a$ è la tensione ammissibile dell'acciaio si ricava l'area minima che occorre attribuire a tali armature disposte a passo Δx:

$$A_a = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \sqrt{2} \cdot \bar{\sigma}_a}.$$

Staffe

Nel caso delle staffe, il triangolo delle forze trasmesse al nodo si modifica come indicato nella figura seguente, per cui lo sforzo nella biella compressa diventa $\sqrt{2} \Omega$ (pari al doppio del caso precedente) e la trazione F_a in ogni staffa diventa pari ad Ω , ossia:

$$F_a = \Omega = \frac{T \cdot \Delta x}{z}$$



quindi si ha uno sforzo maggiore, a parità di Δx , rispetto ai ferri piegati. L'area minima di ogni staffa è data da:

$$A_{st} = \frac{\Omega}{\bar{\sigma}_a} = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \bar{\sigma}_a}$$

e quindi

$$A_{st} = A_b \cdot n_b = \frac{T \cdot \Delta x}{z \cdot \bar{\sigma}_a},$$

dove si è indicato con A_b l'area di un singolo braccio della staffa e con n_b il numero di bracci.
