Teoria di Résal

La teoria di Rèsal, una delle ultime in ordine di tempo, consente di calcolare analiticamente la spinta prodotta da un terrapieno delimitato da due piani: il fronte del terrapieno stesso e la superficie superiore; per tale motivo viene anche detta **teoria del masso limitato**.
A seguito di numerose esperienze, Résal giunse alle seguenti conclusioni:

- oltre all'angolo di attrito φ della terra, deve anche essere considerata la sua coesione, rilevando che questa viene modificata dagli agenti atmosferici però non sempre riducendola, ma alcune volte riportandola ai valori consueti per il terreno considerato;
- trascurare la coesione significa ammettere che l'attrito fra le varie particelle terrose costituenti il terrapieno sia molto limitato, e quindi dovrebbero essere considerati angoli di attrito molto piccoli che porterebbero a valori della spinta molto elevati, decisamente superiori a quelli reali;
- in realtà vengono sempre assunti angoli di attrito relativamente elevati ottenuti maggiorando, senza una regola precisa, il loro reale valore al fine di considerare in qualche modo la coesione.

Pertanto Résal ipotizza di considerare un **angolo di attrito fittizio** il cui valore variabile dipende dalla possibile quantità di acqua presente nel terreno, ossia dalla sua coesione, supponendo che rimanga costante, e dall'altezza del terrapieno, aumentando la quale il valore si riduce.
Sulla base di queste ipotesi, Résal ha compilato alcune tabelle che forniscono i **coefficienti di spinta *A* e *B*** e l'**angolo θ di inclinazione della spinta** rispetto alla perpendicolare al muro, in funzione dei seguenti parametri:

- angolo di attrito φ del terreno;
- angolo ε di inclinazione della superficie superiore del terreno che può essere positivo **[fig. a]** oppure negativo **[fig. b]**;
- angolo α di inclinazione del fronte *AB* del terrapieno che può essere positivo **[fig. c]** o negativo **[fig. d]**.

Per valori intermedi degli angoli φ, ε, α, rispetto a quelli considerati nelle tabelle, è possibile effettuare l'interpolazione lineare; nella **tabella 1**, è riportato un esempio.

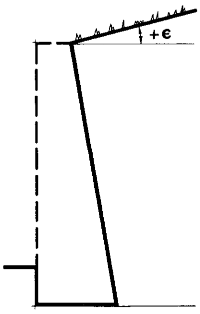


Fig. a

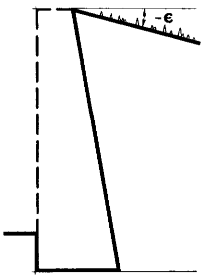


Fig. b

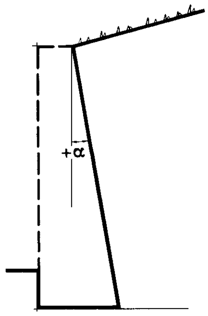


Fig. c

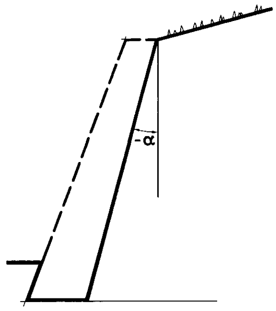


Fig. d

Tabella 1

	α	ε = 25°			ε = 15°			ε = 0		
		θ	*A*	*B*	θ	*A*	*B*	θ	*A*	*B*
φ = 25°	+ 20°	20°12′10″	1124	950	25° 0′ 0″	544	544	25° 0′ 0″	392	392
	+ 15°	22° 6′ 0″	1034	786	»	515	432	»	381	320
	+ 10°	23°36′40″	962	638	»	486	340	»	368	258
	+ 5°	24°37′30″	890	506	»	458	264	»	354	204
	0°	25° 0′ 0″	821	383	»	430	200	»	338	158
	– 5°	24°33′30″	756	269	24°33′30″	402	143	24°33′30″	321	114
	– 10°	23° 5′ 0″	692	161	23° 5′ 0″	375	37	23° 5′ 0″	303	70
	– 15°	20°20′30″	629	59	20°20′30″	347	32	20°20′30″	284	20
	– 20°	16° 8′40″	566	– 38	16° 8′40″	320	– 22	16° 8′40″	263	– 18
	α	ε = 35°			ε = 20°			ε = 0		
φ = 35°	+ 20°	28°33′20″	1057	1197	34°59′ 0″	388	548	35° 0′ 0″	263	375
	+ 15°	31° 1′30″	946	981	35° 0′ 0″	362	431	»	254	303
	+ 10°	33° 2′50″	847	791	»	335	335	»	243	243
	+ 5°	34°27′20″	756	622	»	309	259	»	229	192
	0°	35° 0′ 0″	671	470	»	284	199	»	214	150
	– 5°	34°22′ 0″	591	333	34°22′ 0″	260	146	34°22′ 0″	197	111
	– 10°	31°49′20″	516	206	31°49′20″	235	94	31°49′20″	179	72
	– 15°	26°47′10″	443	93	26°47′10″	210	44	26°47′10″	161	33
	– 20°	18°25′20″	373	– 10	18°25′20″	185	– 5	18°25′20″	142	– 4

9.1.4 Metodo di Poncelet

La teoria di Résal prende in considerazione solo terrapieni privi di sovraccarico e tramite i coefficienti A e B consente di calcolare rispettivamente le componenti orizzontale Q e verticale V della spinta tramite le relazioni:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \frac{A}{1000} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \frac{B}{1000}$$

essendo h l'altezza del terrapieno; la spinta S **[fig. e]** si calcola considerando il triangolo CDE e per via trigonometrica si ottiene:

$$S = \frac{Q}{\cos(\theta + \alpha)} = \frac{V}{\mathrm{sen}\,(\theta + \alpha)}$$

tenendo presente però che l'angolo α può essere positivo o negativo. Considerando solo terrapieni privi di sovraccarico, la spinta S è applicata alla distanza:

$$d = \frac{h}{3}$$

dalla base B e la sua linea di azione è inclinata dell'angolo θ rispetto alla perpendicolare al fronte AB del terrapieno.
La teoria di Résal è il risultato di approfonditi studi e di numerose esperienze e pertanto fornisce valori della spinta S aderenti alla realtà, però la sua linea di azione presenta sempre una notevole inclinazione rispetto all'orizzontale, situazione questa non confermata nella maggior parte dei casi; ciò determina una non trascurabile riduzione del braccio b della spinta **[fig. e]** e quindi del momento spingente rispetto al punto B:

$$M_s = S \cdot b$$

che agisce contro il muro a sostegno del terrapieno, in funzione del quale vengono calcolate le dimensioni del muro stesso; pertanto a un momento spingente più limitato corrisponde una sezione più ridotta del muro che potrebbe essere soggetto a cedimenti.
D'altra parte l'applicazione della teoria di Résal si presenta semplice e rapida e pertanto è particolarmente vantaggiosa e utile quando si deve procedere al dimensionamento di massima di un muro di sostegno.

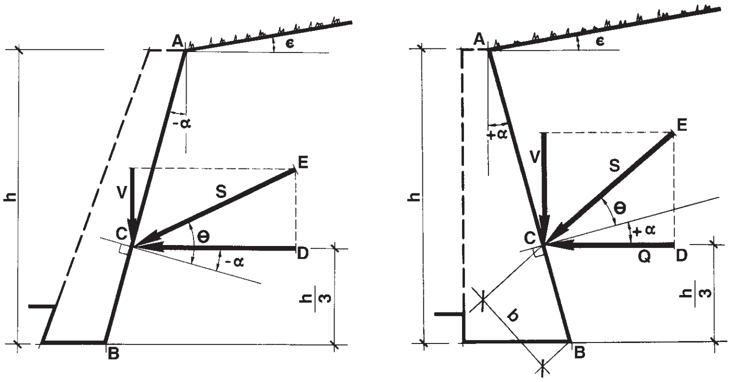
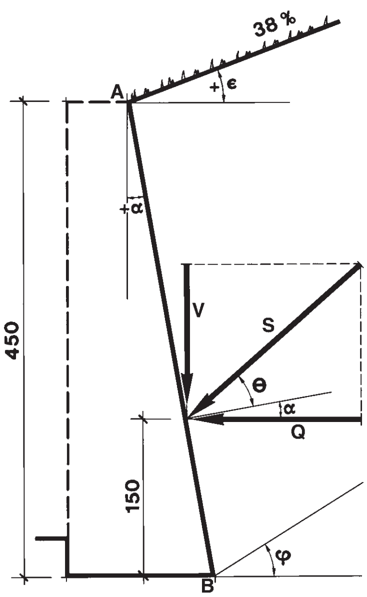


Fig. e

ESERCIZIO SVOLTO

Calcolare l'intensità della spinta prodotta da un terrapieno, costituito di sabbia argillosa umida, con altezza $h = 4{,}50$ m, privo di sovraccarico, superiormente delimitato da un piano che ha una pendenza del 38% circa sopra l'orizzontale, mentre il fronte presenta una scarpa $s = 0{,}80$ m.



In relazione alle caratteristiche del terreno si assumono i seguenti parametri:

- angolo di attrito del terreno: $\varphi = 32°$
- peso volumico: $\gamma_t = 16{,}00$ kN/m^3

Vengono ora calcolati gli angoli α e ε:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{s}{h} = \mathrm{arctg}\,\frac{0{,}80}{4{,}50} \approx +10°$$

$$\varepsilon = \mathrm{arctg}\,\frac{38}{100} \approx +21°$$

Sulle tabelle sono riportati solo i valori di $\varepsilon = +20°$ e $\alpha = +10°$, mentre manca quello di $\varphi = 32°$, per cui è necessario procedere all'interpolazione lineare ricercando i valori dei coefficienti di spinta A e B e dell'angolo θ prima per $\varphi = 25°$, $\alpha = +10°$ e $\varepsilon = +21°$ quindi per $\varphi = 35°$, $\alpha = +10°$ e $\varepsilon = +21°$ e infine per $\varphi = 32°$, $\alpha = +10°$ e $\varepsilon = +21°$.

$\varphi = 25°$ e $\alpha = +10°$

$\varepsilon = +15°$	$A = 486$	$B = 340$	$\theta = 25°$	$= 90\,000''$
$\varepsilon = +21°$				
$\varepsilon = +25°$	$A = 962$	$B = 638$	$\theta = 23°\,36'40''$	$= 85\,000''$
$10° = 36\,000''$	476	298		$5000''$
$6° = 21\,600''$				

Impostando le proporzioni e risolvendo si ottiene:

Coefficiente A

$36\,000'' : 476 = 21\,600'' : x$ da cui $x = 285{,}60$

e quindi:

$A = 486 + 285{,}60 = 771{,}60$

Coefficiente B

$36\,000'' : 298 = 21\,600'' : x$ da cui $x = 178{,}80$

e quindi:

$B = 340 + 178{,}80 = 518{,}80$

Angolo θ

$36\,000'' : 5000'' = 21\,600'' : x$ da cui $x = 3000''$

e quindi:

$\theta = 90\,000'' - 3000'' = 87\,000''$

Si effettua ora una seconda interpolazione.

$\varphi = 35°$ e $\alpha = +10°$

$\varepsilon = +20°$	$A = 335$	$B = 335$	$\theta = 35°$	$= 126\,000''$
$\varepsilon = +21°$				
$\varepsilon = +35°$	$A = 847$	$B = 791$	$\theta = 33°\,02'50''$	$= 118\,970''$
$15° = 54\,000''$	512	456		$7030''$
$1° = 3600''$				

Coefficiente A

$54\,000'' : 512 = 3600'' : x$ da cui $x \approx 34{,}13$

e quindi:

$A = 335 + 34{,}13 = 369{,}13$

Coefficiente B

$54\,000'' : 456 = 3600'' : x$ da cui $x = 30{,}40$

e quindi:

$B = 335 + 30{,}40 = 365{,}40$

Angolo θ

$54\,000'' : 7030'' = 3600'' : x$ da cui $x \approx 469''$

e quindi:

$\theta = 126\,000'' - 469'' = 125\,531''$

Con l'ultima interpolazione si ottengono i valori cercati.

$\varepsilon = +21°$ e $\alpha = +10°$

$\varphi = +25°$	$A = 771{,}60$	$B = 518{,}80$	$\theta = 87\,000''$
$\varphi = +32°$			
$\varphi = +35°$	$A = 369{,}13$	$B = 365{,}40$	$\theta = 125\,531''$
$10° = 36\,000''$	$402{,}47$	$153{,}40$	$38\,531''$
$7° = 25\,200''$			

Coefficiente A

$36\,000'' : 402{,}47 = 25\,200'' : x$ da cui $x \approx 281{,}73$

e quindi:

$A = 771{,}60 - 281{,}73 = 489{,}87$

Coefficiente B

$36\,000'' : 153{,}40 = 25\,200'' : x$ da cui $x = 107{,}38$

e quindi:

$B = 518{,}80 - 107{,}38 = 411{,}42$

Angolo θ

$36\,000'' : 38\,531'' = 25\,200'' : x$ da cui $x \approx 26\,971''$

e quindi:

$\theta = 87\,000'' + 26\,971'' = 113\,971'' \approx 31°\,39'\,31''$

Calcolo delle componenti verticale e orizzontale e della spinta *S*

$$V = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \frac{A}{1000} = \frac{1}{2} \times 16{,}00 \times 4{,}50^2 \times \frac{489{,}87}{1000} \approx 79{,}36 \text{ kN}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \frac{B}{1000} = \frac{1}{2} \times 16{,}00 \times 4{,}50^2 \times \frac{411{,}42}{1000} = 66{,}65 \text{ kN}$$

La spinta S vale:

$$S = \frac{Q}{\cos(\theta + \alpha)} = \frac{66{,}65}{\cos(31°39'31'' + 10°)} \approx 89{,}21 \text{ kN}$$

ed è applicata alla distanza:

$$d = \frac{h}{3} = \frac{4{,}50}{3} = 1{,}50 \text{ m}$$

La sua linea di azione forma con la perpendicolare al fronte AB l'angolo $\theta = 31°\,39'\,31''$.