9.1.4 Metodo di Poncelet

Metodo di Culmann

Il **metodo di Culmann** è applicabile per qualunque geometria del terrapieno, ossia con fronte verticale o inclinato, superficie superiore orizzontale, inclinata o comunque accidentata sulla quale può o meno gravare un sovraccarico.
Sulla base dei concetti informatori della teoria di Coulomb e tenendo conto dell'angolo di attrito φ_1 fra il terrapieno e il muro, il peso *P* del prisma di terra con base *ABX* che tende a scorrere può essere scomposto secondo le componenti *S*, formante l'angolo φ_1 con la perpendicolare al fronte *AB* del terrapieno, ed *N* che forma l'angolo φ con la perpendicolare al piano di scorrimento di traccia *BX*; l'intensità delle due componenti si ottiene con il triangolo delle forze 0-1-2 **[fig. a]**.

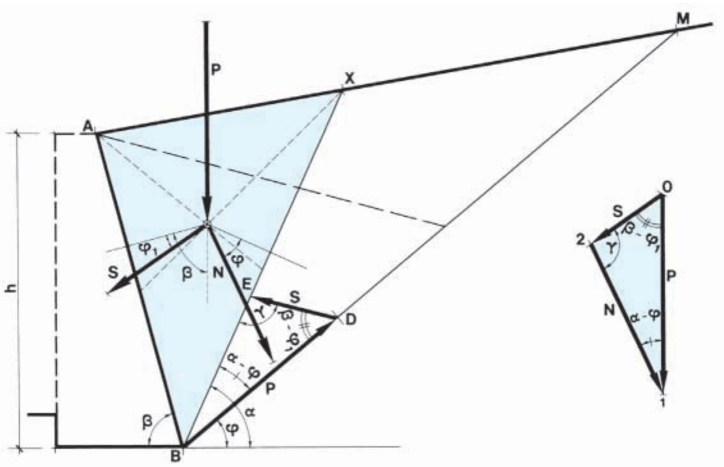

Fig. a

Tenendo presente che gli angoli $\widehat{0\text{-}1\text{-}2}$ e $\widehat{XBM}$ sono uguali, il triangolo di equilibrio può anche essere ottenuto riportando $BD = P$ sulla retta *BM* e quindi tracciando *DE* che forma l'angolo $(\beta - \varphi_1)$ con la *BM*: il segmento *DE*, letto in scala forze, fornisce l'intensità della spinta *S* e rappresenta la retta di direzione.

Sulla base di queste considerazioni, ai fini della ricerca del piano con traccia *BX*, che definisce il prisma di massima spinta, Culmann considera successivi prismi di terra a base triangolare **[fig. b]** compresi nell'ambito del triangolo *ABM*, per ognuno dei quali si ha un triangolo di equilibrio del tipo 0-1-2 e il corrispondente *BDE*; tutti i triangoli di equilibrio che si ottengono hanno in comune l'angolo $(\beta - \varphi_1)$, mentre l'angolo $(\alpha - \varphi)$ varia in relazione al piano di scorrimento considerato.
Il piano che definisce il prisma di massima spinta viene individuato con la seguente costruzione grafica:

1. tracciare la retta *BM* di natural declivio e quindi suddividere il segmento *AM* in un certo numero di parti, non necessariamente uguali e quindi congiungere i punti C_1, C_2, C_3, ... con *B*, definendo in tale modo i triangoli che costituiscono le basi di altrettanti prismi di terra;
2. calcolare i pesi P_1, P_2, P_3, ... dei prismi ①, ②, ③, ... che vengono riportati nell'ordine, in un'apposita scala forze, sulla retta *BM*, uno di seguito all'altro;
3. tracciare per il punto *B* la retta di direzione *t* che forma l'angolo $(\beta - \varphi_1)$ con la *BM*;
4. a partire dalle estremità D_1, D_2, D_3, ... dei vettori che rappresentano i pesi P_1, P_2, P_3, ... tracciare le parallele alla retta di direzione *t* sino a intersecare nei punti E_1, E_2, E_3, ... i piani di scorrimento dei rispettivi prismi di terra: per esempio il segmento BD_3 rappresenta il peso $P_1 + P_2 + P_3$ dei prismi ①, ②, ③, ossia del prisma con base triangolare ABC_3, il cui piano di scorrimento ha come traccia la retta BC_3; dal punto D_3 si traccia la parallela alla *t* sino a intersecare in E_3 la BC_3: la congiungente E_3D_3 rappresenta la retta di direzione della spinta dovuta al prisma considerato e la sua lunghezza esprime la spinta S_3 prodotta da tale prisma;
5. i segmenti D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, ..., letti in scala forze, rappre-

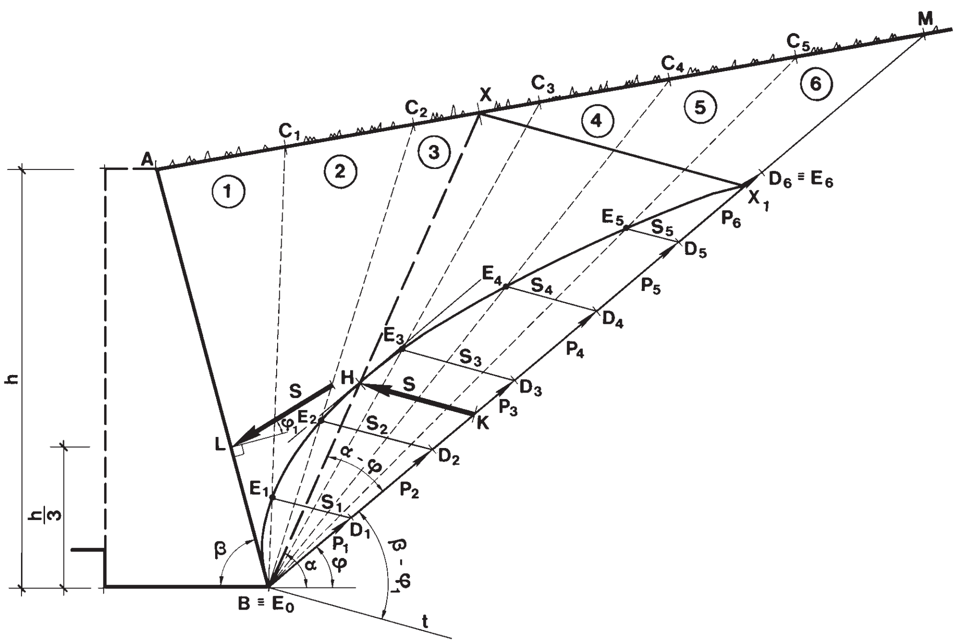

Fig. b

9.1.4 Metodo di Poncelet

sentano quindi le spinte dei prismi di terra ①, ① + ②, ① + ② + ③, ... delimitati rispettivamente dai piani di scorrimento BC_1, BC_2, BC_3, ... e tutti dal fronte *AB* del terrapieno;

6. definiti i vari punti E_1, E_2, E_3, ... questi vengono raccordati, a partire da *B*, con una linea che viene definita **linea di Culmann** o **delle spinte**.

Osservando tale linea e tenendo presente che le lunghezze dei vari segmenti D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, ... compresi fra la suddetta linea e la retta *BM* esprimono le intensità delle spinte dei prismi di terra gradualmente crescenti, è facile rilevare che i valori delle varie spinte S_1, S_2, S_3, ... risultano gradualmente crescenti a partire da un valore nullo in *B* sino a un certo punto, per poi nuovamente diminuire sino a ritornare a un valore nullo in D_6 dove la linea di Culmann interseca la retta *BM* di natural declivio, ossia quando il massimo prisma di terra che potrebbe staccarsi dal terrapieno e scivolare verso il basso presenta una base coincidente con il lato *BM* del triangolo *ABM* per cui si avrebbe $\alpha = \varphi$, e ciò in perfetta analogia con la teoria di Coulomb, nella cui formula, ponendo appunto $(\alpha - \varphi) = 0$, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \mathrm{tg}^2\,(90° - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \mathrm{tg}^2\,(90° - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\,0°$$

e poiché $\mathrm{tg}\,0° = 0$, risulta $S = 0$.

Pertanto la massima spinta è rappresentata dal segmento più lungo parallelo alla retta di direzione *t* e compreso fra la linea delle spinte e la retta *BM* di natural declivio, che viene facilmente individuata tracciando la tangente alla linea di Culmann parallela alla *BM*: la parallela alla retta di direzione *t* per il punto di tangenza *H* individua il segmento *HK*, la cui lunghezza, letta in scala forze, definisce la spinta massima *S*.
La costruzione grafica viene così completata:

- la congiungente *BH* interseca nel punto *X* la retta *AM*, traccia della superficie superiore del terreno; la retta *BX* rappresenta la traccia del piano di scorrimento del prisma di massima spinta *ABX*;
- dal punto *X* viene tracciata la parallela alla retta *HK* che definisce nel segmento XX_1 la dimensione della spinta.

La spinta massima *S* è applicata nel punto *L* alla distanza:

$$d = \frac{h}{3}$$

dalla base *B* del terrapieno e la sua linea di azione è inclinata dell'angolo φ_1 rispetto alla perpendicolare al fronte *AB* del terrapieno.

Come applicazione del Metodo di Culmann, calcoliamo la spinta esercitata da un terrapieno, costituito di argilla asciutta, che presenta un'altezza di 5,00 m, privo di sovraccarico, delimitato superiormente da una superficie piana con pendenza p = 18%, mentre il fronte presenta una scarpa positiva s = 0,60 m **[fig. c]**.

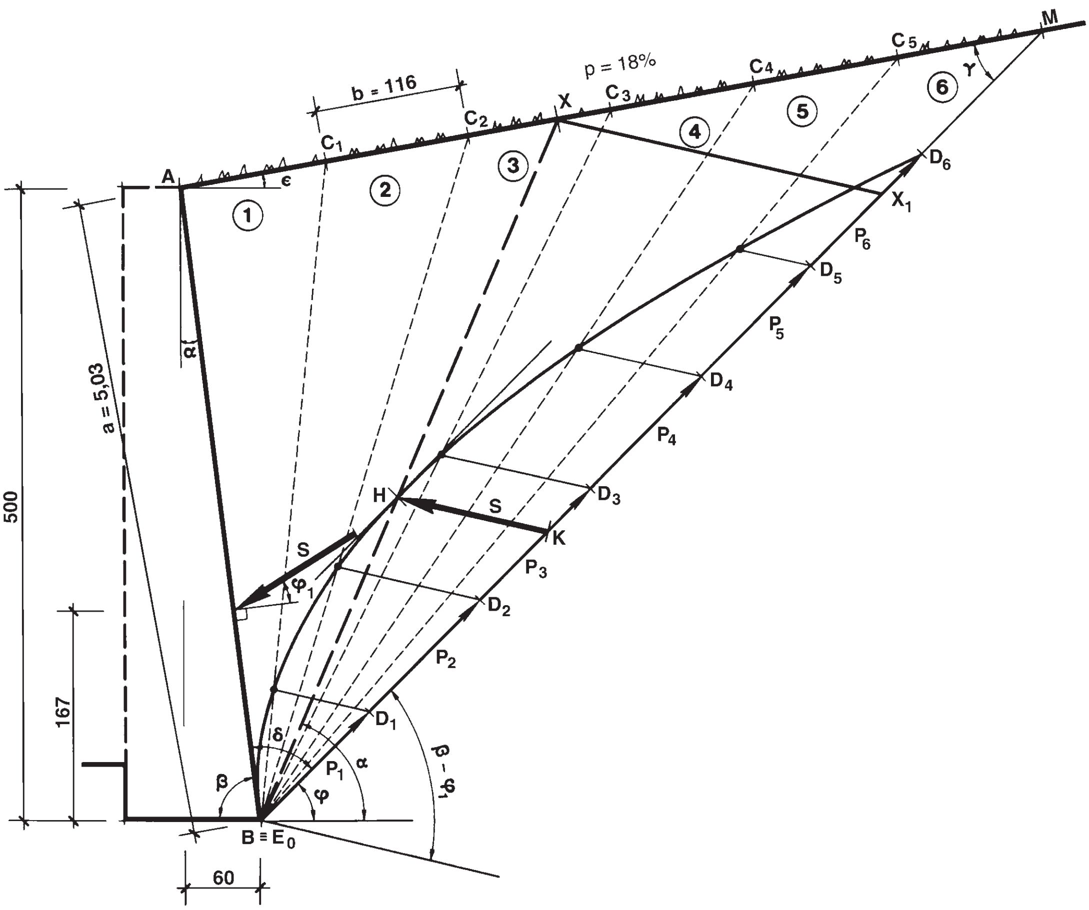

Fig. c

Quando il terrapieno presenta una superficie superiore piana, orizzontale o meno, com'è in questo caso, il procedimento di Culmann può essere semplificato suddividendo il segmento *AM* in parti uguali con lunghezza *b*, in quanto così facendo i vari triangoli che si ottengono presentano tutti base uguale e la stessa altezza *a*, e pertanto, considerando 1,00 m di lunghezza, i volumi, e quindi i pesi P_1, P_2, P_3, ... dei vari prismi di terra, aventi per base i suddetti triangoli, sono tutti uguali ed è sufficiente calcolare il peso P^* di un solo prisma, ossia:

$$P^* = P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot 1{,}00 \cdot \gamma_t$$

per cui:

$$P^* = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \gamma_t$$

Prima di procedere alla costruzione grafica si determina il valore dell'angolo β che risulta:

$$\beta = \text{arctg}\,\frac{h}{s} = \text{arctg}\,\frac{5{,}00}{0{,}60} \approx 83°{,}16$$

e dell'angolo ε:

$$\varepsilon = \text{arctg}\,\frac{18}{100} \approx 10°{,}20$$

Tracciato il profilo del terrapieno, applicando il teorema dei seni al triangolo *ABM* e assumendo un angolo di attrito del terreno $\varphi = 45°$ si ha:

$$\overline{AM} : \text{sen}\,\delta = \overline{AB} : \text{sen}\,\gamma$$

ed essendo:

$$\overline{AB} = \frac{h}{\text{sen}\,\beta} = \frac{5{,}00}{\text{sen}\,83°{,}16} \approx 5{,}04 \text{ m}$$

$$\delta = 180° - (\beta + \varphi) = 180° - (83°{,}16 + 45°) = 51°{,}84$$

$$\gamma = 180° - (\delta + \beta + \varepsilon) = 180° - (51°{,}84 + 83°{,}16 + 10°{,}20) = 34°{,}80$$

sostituendo si ottiene:

$$\overline{AM} : \text{sen}\,51°{,}84 = 5{,}04 : \text{sen}\,34°{,}80$$

da cui:

$$\overline{AM} = \frac{5{,}04 \cdot \text{sen}\,51°{,}84}{\text{sen}\,34°{,}80} \approx 6{,}94 \text{ m}$$

Il segmento $\overline{AM}$ viene diviso in sei parti uguali con lunghezza:

$$b = \frac{\overline{AM}}{6} = \frac{6{,}94}{6} \approx 1{,}16 \text{ m}$$

9.1.4 Metodo di Poncelet

In relazione alle caratteristiche del terreno si assumono i seguenti parametri:

- angolo di attrito terra-muro: $\varphi_1 = 25°$
- peso volumico: $\gamma_t = 17{,}00$ kN/m^3

I sei triangoli ottenuti unendo il punto *B* con le suddivisioni del segmento $\overline{AM}$ presentano, rispetto alla base *b*, uguale altezza, che viene così calcolata:

$$a = \overline{AB} \cdot \text{sen}\,[180° - (\beta + \varepsilon)] = 5{,}04 \cdot \text{sen}\,[180° - (83°{,}16 + 10°{,}20)] \approx 5{,}03 \text{ m}$$

Il peso costante dei prismi di terra risulta:

$$P^* = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \gamma_t = \frac{1}{2} \times 5{,}03 \times 1{,}16 \times 17{,}00 \approx 49{,}60$$

Riportati i sei vettori che rappresentano i pesi P^* dei successivi prismi di terra sulla retta *BM* a partire da *B* e in successione, viene effettuata la costruzione grafica di Culmann prima descritta, con la quale viene individuato il segmento $HK = 2{,}47$ cm che, riportato in scala forze, fornisce la spinta $S = 49{,}40$ kN, applicata alla distanza:

$$d = \frac{h}{3} = \frac{5{,}00}{3} \approx 1{,}67 \text{ m}$$

dalla base del terrapieno e inclinata dell'angolo $\varphi_1 = 25°$ rispetto alla perpendicolare al fronte *AB*.
Quando sulla superficie superiore del terrapieno grava un sovraccarico ripartito totale o parziale (oppure concentrato) [fig. d], il procedimento è analogo a quello prima descritto avendo però l'avvertenza, solo per comodità di calcolo, di suddividere le parti gravate da un determinato sovraccarico in un numero intero di prismi di terra.
Sulla retta *BM* di natural declivio vengono ovviamente riportati per ogni prisma il suo peso *P* e quello di competenza del sovraccarico *Q*.

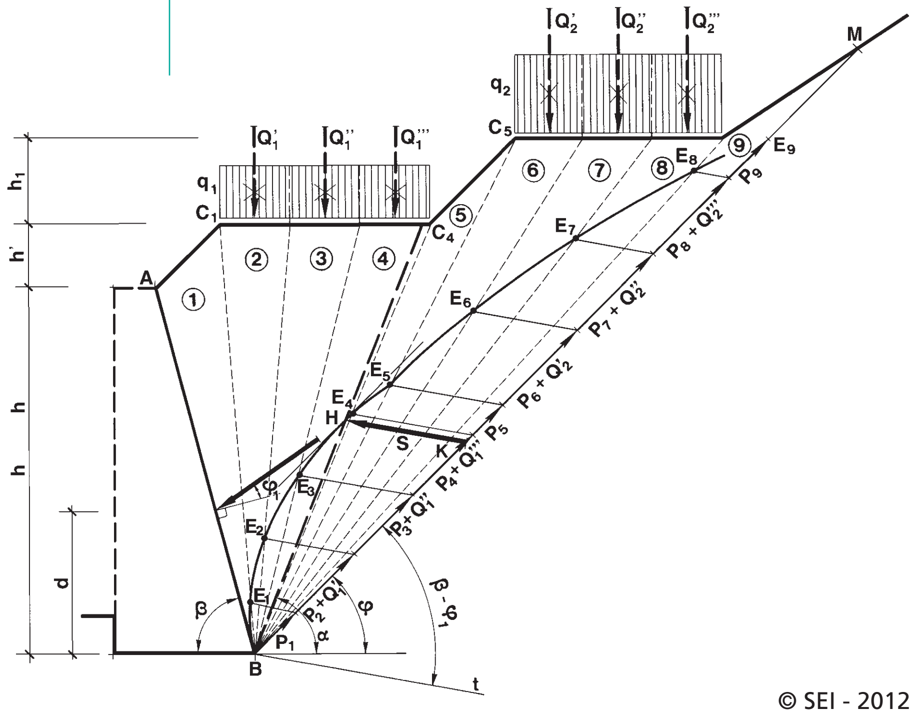

Fig. d