

Teoria di Coulomb: dimostrazioni

Terrapieno senza sovraccarico

Prendiamo in considerazione un terrapieno privo di sovraccarico con altezza h [fig. a] e studiamo l'equilibrio di un generico prisma di terra a base triangolare ABX delimitato dai piani di traccia AB , costituente il fronte del terrapieno, di traccia BX , formante con l'orizzontale l'angolo $\alpha > \varphi$ (essendo φ l'angolo di attrito della terra), e di altezza unitaria AA' (di norma 1,00 m e definito *metro di fuga*) misurata in senso perpendicolare al piano della sezione [fig. c].

Detto prisma presenta un peso:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AA'} \cdot \gamma_t$$

ossia:

$$P = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AX} \cdot \gamma_t \quad [1]$$

Il vettore che lo rappresenta passa per il baricentro G del triangolo ABX [fig. a] e incontra la traccia BX nel punto C , in corrispondenza del quale la forza P viene scomposta nelle due componenti P_n perpendicolare al piano di scorrimento di traccia BX , che rappresenta la spinta esercitata contro il terreno, equilibrata dalla reazione ($-P_n$) del terreno stesso, ed S_0 perpendicolare al fronte del terrapieno con traccia AB , che rappresenta la spinta prodotta dal prisma di terra considerato contro il muro, prima che tenda a staccarsi per effetto del cedimento del muro stesso, e che per tale motivo viene definita *spinta di quiete*.

Le intensità delle due componenti si ottengono con il poligono di equilibrio 0-1-2 [fig. b].

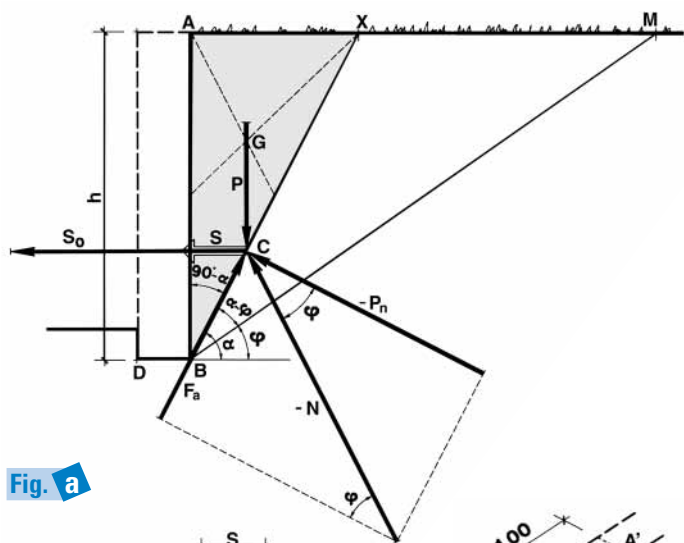


Fig. a

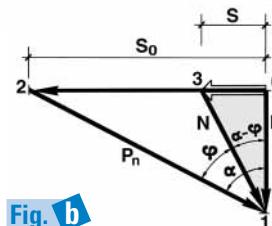


Fig. b

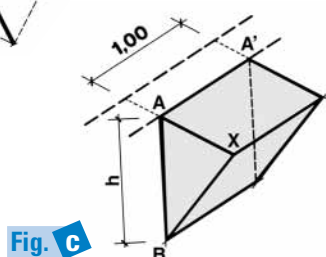


Fig. c

In realtà il muro subisce un cedimento per rotazione in corrispondenza del punto D [fig. d] o per traslazione, che determina un leggero distacco del prisma di terra e conseguente insorgenza di resistenze di attrito fra terra e terra lungo il piano di scorrimento, la cui intensità totale può essere calcolata con la relazione:

$$F_a = P_n \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

che determina una riduzione del valore della S_0 .

La risultante N fra la F_a e la P_n [fig. a], che forma con quest'ultima l'angolo φ , rappresenta la spinta effettiva sul terreno.

Tracciando per il vertice 1 del poligono di equilibrio [fig. b] la parallela alla N si ottiene il triangolo di equilibrio 0-1-3, nel quale il segmento 0-3 rappresenta in verso e intensità la spinta attiva esercitata dal terrapieno contro il muro, la cui intensità vale:

$$S = P \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad [2]$$

che risulta di molto inferiore alla spinta di quiete S_0 .

Sostituendo in quest'ultima il valore di P dato dalla [1], si ha:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AX} \cdot \gamma_t \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

ed essendo:

$$\overline{AX} = \overline{AB} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = h \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad [3]$$

L'angolo α può variare nell'intervallo:

$$\varphi \leq \alpha \leq 90^\circ$$

e in particolare risulta $S = 0$ per $\alpha = \varphi$ e per $\alpha = 90^\circ$; gli infiniti valori di α compresi in tale intervallo forniscono valori della spinta S che presentano una variazione abbastanza simile a quella parabolica [fig. e], però solo a uno corrisponde la spinta massima.

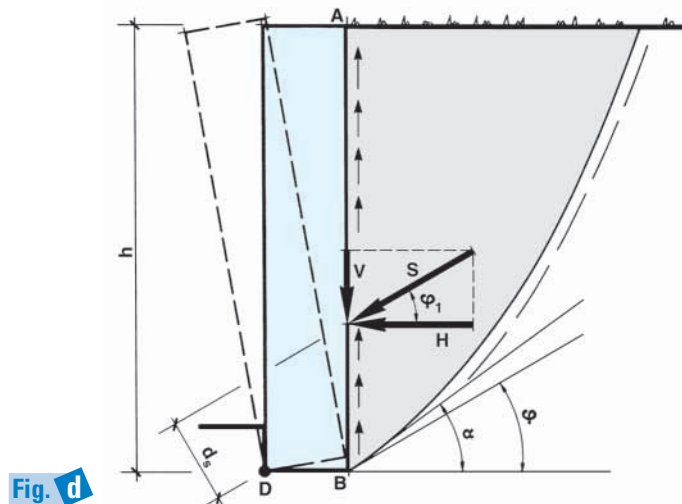


Fig. d

9.1.2 Teoria di Coulomb

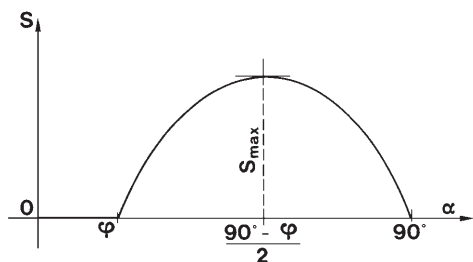


Fig. e

Coulomb, per via sperimentale, ha determinato che il valore di tale angolo α è:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{90^\circ + \varphi}{2} \quad [4]$$

ossia il prisma di terra che fornisce la spinta massima è delimitato dal piano di scorrimento, con traccia BX , bisettore dell'angolo formato dal piano costituente il fronte del terrapieno, con traccia AB , e da quello di naturale declivio, con traccia BM [fig. a]; per tale motivo la **teoria di Coulomb** viene anche detta **teoria del prisma di massima spinta**.

Sostituendo la [4] nella [3] si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{90^\circ + \varphi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ + \varphi}{2} - \varphi\right)$$

ossia:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{([kN/m])} \quad [5]$$

che rappresenta la **formula di Coulomb** per il calcolo della spinta su un metro di lunghezza di terrapieno, dove il termine $k_a = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) < 1$ rappresenta il coefficiente di riduzione che viene definito *coefficiente di spinta attiva*.

Terrapieno con sovraccarico

Per semplicità di calcolo, se il carico di esercizio è costituito da folla compatta oppure da carichi mobili rappresentati da veicoli in transito e quindi viene considerato uniformemente ripartito, si può immaginare costituito da una maggiore altezza di terra, con uguali caratteristiche di quella formante il terrapieno, il cui peso totale P_2 deve essere uguale a quello del carico di esercizio nel tratto AX [fig. f]; pertanto, indicando con q (in kN/m^2) il carico unitario di esercizio, sussiste la seguente uguaglianza:

$$q = 1,00 \times 1,00 \cdot h_1 \cdot \gamma_t$$

da cui:

$$h_1 = \frac{q}{\gamma_t} \quad [6]$$

Nel caso in cui il sovraccarico sia costituito da materiali in deposito, con peso volumico γ_m , per un'altezza h_m , l'altezza fittizia h_1 dello strato di terra equipesante può essere ottenuta

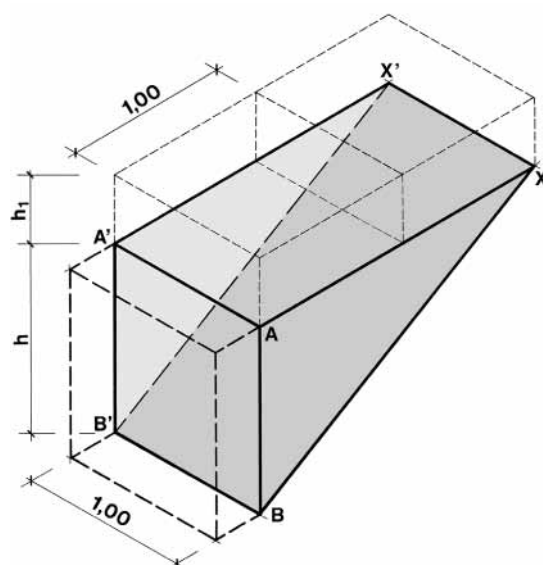


Fig. f

scrivendo l'uguaglianza:

$$1,00 \times 1,00 \cdot h_m \cdot \gamma_m = 1,00 \cdot h_1 \cdot \gamma_t \quad [7]$$

da cui:

$$h_1 = h_m \cdot \frac{\gamma_m}{\gamma_t}$$

Applicata la forza P_1 nel baricentro g_1 del triangolo ABX [figg. h e g], base del prisma di massima spinta, e la forza P_2 nel baricentro g_2 del rettangolo $ADEX$, base del parallelepipedo fittizio di terra, si determina la risultante R delle due forze [fig. h] che incontra il piano di scorrimento con traccia BX nel punto C e presenta un'intensità:

$$R = P_1 + P_2$$

Fig. g

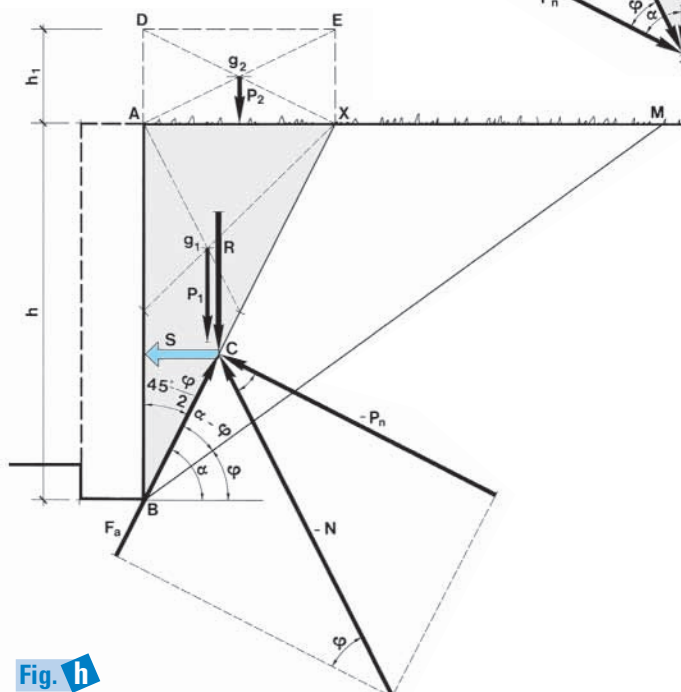
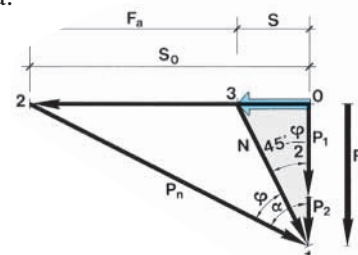


Fig. h

ed essendo:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AX} \cdot 1,00 \cdot \gamma_t = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AX} \cdot \gamma_t$$

$$P_2 = \overline{AX} \cdot 1,00 \cdot h_t \cdot \gamma_t$$

sostituendo si ha:

$$R = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AX} \cdot \gamma_t + \overline{AX} \cdot h_t \cdot \gamma_t = \frac{1}{2} \cdot \overline{AX} \cdot \gamma_t \cdot (h + 2 \cdot h_t) \quad [8]$$

Dal triangolo ABX si ricava:

$$\overline{AX} = \overline{AB} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = h \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Sostituendo nella [8] ed elaborando si ottiene:

$$R = \left[\frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_t}{h} \right) \quad [9]$$

La risultante R [fig. g] viene scomposta in C nelle due componenti S_0 (spinta in quiete) e P_n (pressione contro il terreno sul piano di scorrimento); prendendo in considerazione anche la forza di attrito:

$$F_a = P_n \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

componendo questa con la P_n si ottiene la risultante N . Dal triangolo di equilibrio 0-1-3 [fig. g] si ricava l'intensità della spinta S , rappresentata dal segmento 0-3; analiticamente si ha:

$$S = R \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

e sostituendo la [9]:

$$S = \left[\frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_t}{h} \right) \quad ([\text{kN/m}]) \quad [10]$$

Questa formula consente di calcolare con la teoria di Coulomb la spinta esercitata da un terrapieno sul quale grava un sovraccarico; è interessante notare che essa è uguale a quella per il calcolo della spinta dovuta a un terrapieno privo di sovraccarico, salvo il fattore $\left(1 + \frac{2 \cdot h_t}{h} \right)$ che si troverà anche nelle altre teorie quando viene considerata un'analogha condizione.

9.1.2 Teoria di Coulomb

Formula di Coulomb semplificata

L'espressione:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \gamma_t \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

rappresenta la **formula di Coulomb semplificata** ed è applicabile quando sono soddisfatte le limitazioni:

- superficie superiore orizzontale, quindi $\varepsilon = 0$;
- fronte del terrapieno verticale e quindi $\beta = 90^\circ$;
- non si considera l'attrito terra-muro per cui $\varphi = 0$.

Formula di Coulomb generalizzata

Successivi studi hanno sviluppato ulteriormente la teoria di Coulomb mediante integrazioni, giungendo a una **formula generalizzata di Coulomb**, applicabile senza alcuna limitazione, nella quale il coefficiente di spinta attiva è dato da:

$$k_a = \frac{\operatorname{sen}^2 (\beta + \varphi)}{\operatorname{sen}^2 \beta \cdot \operatorname{sen} (\beta - \varphi_1) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (\varphi + \varphi_1) \cdot \operatorname{sen} (\beta - \varphi_1)}{\operatorname{sen} (\varepsilon - \varphi_1) \cdot \operatorname{sen} (\beta + \varepsilon)}} \right]^2}$$

dove: β = inclinazione del fronte del terrapieno rispetto all'orizzontale [fig. i];

φ = angolo di attrito della terra;

φ_1 = angolo di attrito terra-muro;

ε = inclinazione della superficie superiore del terrapieno rispetto all'orizzontale.

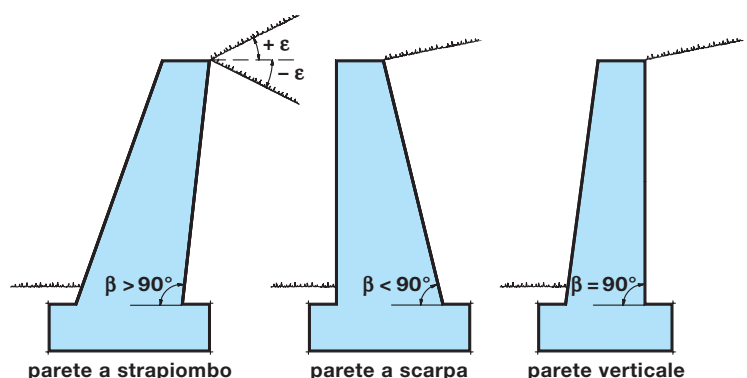


Fig. i